

Math. P.

490^m

Math. P. 470 m

Nicol. I.

BEYTRÄGE ZUR THEORIE
DER
SEHNENWINKEL.

Von
J. R i e d l.

Mit sieben Kupfertafeln.

W i e n, 1827.
In Commission bey J. G. Heubner.

42-13.



Gedruckt bey Carl Gerold.

I n h a l t.

	<i>Einleitung</i>	1
1. }	Segmente und Pole sphärischer Dreyecke, Tan-	
2. }	genten - Winkel und ihre Stammwinkel.	
3.	Abtheilung.	
4. }	Winkel am Pole.	
5. }		
	<i>Abstammung der sphärischen Dreyecke und all-</i>	
	<i>gemeine Gleichungen ihrer Excedenten</i> . .	5
6. }		
7. }	Gesetze der sphärischen Dreyecke des <i>ersten Fal-</i>	
8. }	<i>les</i> , und der rechtwinkligen Sehnendreyecke.	
9. }		
10. }		
11. }		
12. }	Gesetze der sphärischen Dreyecke des <i>zweyten</i>	
13. }	<i>Falles</i> , und der spitzwinkligen Sehnendrey-	
14. }	ecke	7
15. }		
16. }		
17. }		
18. }		
19. }		
20. }	Gesetze der sphärischen Dreyecke des <i>dritten</i>	
21. }	<i>Falles</i> , und der stumpfen Sehnendreyecke .	11
22. }		
23. }		
24. }		
	<i>Geometrischer Werth der Excedenten und Ent-</i>	
	<i>wurfswinkel</i>	16
25. }	Das in den Elementen der Trigonometrie erwie-	
26. }	sene Verhältniß der <i>Summe der Excedenten</i>	
27. }	zum Flächenmaße wird als bekannt vorausge-	
28. }	setzt, und der <i>Antheil</i> an dem Werthe dieser	
29. }	Summe, für jeden einzelnen Excedenten aus	
	den allgemeinen Gesetzen abgeleitet	19

30.	} Trigonometrische Bestimmung des Werthes der <i>Entwurfswinkel</i>	22
31.		
32.		
33.		
	<i>Anwendung auf alle Arten von Sehnenwinkeln in sphärischen und geodetischen Segmenten</i> .	27
34.	} Verhältniß der Excedenten und Entwurfswinkel in der Halbkugel und im Octaëdram.	
35.		
36.	} Trigonometrische Werthe der <i>geodetischen Exce-</i> <i>denten</i>	29
37.		
38.		
39.	} Gesetze der geodetischen Dreyecke des ersten und zweyten Falles	31
40.		
41.		
42.	} Sphärische Regeldreyecke des zweyten Falles, mit drey gleichen Excedenten	35
43.		
44.		
45.		
46.	} Sphärische Regeldreyecke des dritten Falles, mit einem einzigen Excedenten	38
47.		
48.	} Regeldreyecke im Icosaëdram	39
49.		
50.	} Gesetze der geodetischen Dreyecke des dritten Falles	42
51.		
52.		
53.		
54.	} Zweifelhafte geodetische Dreyecke und unmögli- che Sehnendreyecke	46
55.		
56.		

E i n l e i t u n g.

1. Jedes geradlinige Dreyeck hat seinen eigenen Kreis, der es umschliesst, auf dessen Peripherie die drey Scheitelpunkte stehen, und dessen vom Mittelpunkte auf die Mitte der Dreyecks-Seiten gezogene Strahle diese Seiten senkrecht schneiden.

Eben so entspricht jedes sphärische Dreyeck einem *Kugel-Segmente*, auf dessen Oberfläche sich die drey grossen Kreisbögen des Dreyecks befinden, dessen Pol zugleich *der Pol des Dreyecks* ist, und auf dessen *Grundfläche* die Scheitelpunkte das *Sehnendreyeck* bilden, von welchem das *sphärische abstammt*.

Die vom Pole rechtwinklig auf die Bögen des sphärischen Dreyecks gezogenen grossen Kreise theilen dieselben in zwey gleiche Theile.

Die vom Pole auf die Mitte der Bögen gezogenen grossen Kreise bilden mit ihnen rechte Winkel.

Die mitten auf den drey Bögen senkrecht errichteten grossen Kreise schneiden sich im Pole.

2. Jedes Sehnendreyeck mit seinem Kreise ist Grundfläche von unendlich vielen verschiedenen Segmenten, indem der Halbmesser der Kugel zwar nie kleiner als der Halbmesser jenes Kreises, wohl aber bis ins Unendliche grösser gedacht werden kann.

Da nun in jedem dieser Segmente ein anderes sphärisches Dreyeck aus dem Einen, unveränderten Sehnendreyecke entsteht, so erhellt, *dass von jedem möglichen Sehnendreyecke unendlich vielerley sphärische abstammen, da hingegen jedes sphärische nur einem einzigen Sehnendreyecke entspricht.*

Jeder sphärische oder *Tangenten-Winkel* hat daher einen *Stammwinkel im Sehnendreyecke*.

Der positive oder negative Unterschied ihrer beyden Werthe heisst *Excedent*.

3. In Hinsicht der Lage des Poles gegen die Bögen des Dreyecks gibt es drey Fälle, nach welchen alle sphärischen Dreyecke in drey Classen zu theilen sind.

- I. *In einem Dreyecke des ersten Falles geht einer der Bögen durch den Pol; $b'p'c'$, $b''p''c''$, $b'''p'''c'''$. (Fig. 1.)*
- II. *In einem Dreyecke des zweyten Falles ist der Pol p' , p'' oder p''' von den Bögen ab , bc , ca eingeschlossen. (Fig. 2.)*
- III. *Im dritten Falle ist der Pol ausser dem Dreyecke. (Fig. 3.)*

4. Jeder sphärische Winkel α' hat seinen eigenen *Winkel am Pole*, der von den beyden, aus der Mitte der einschliessenden Seiten senkrecht aufgerichteten grossen Kreisbögen $N'p'$ und $M'p'$ gebildet wird. Seine Bezeichnung sey $p_{\alpha'} = N'p'M'$. (Fig. 1. 2. 3.)

Eben so:

$$\left. \begin{array}{l} p_a = dPe \\ p_b = dPb \\ p_c = ePc \end{array} \right\} \text{im ersten Falle. (Fig. 4.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_a = dPf \\ p_b = dPe \\ p_c = ePf \end{array} \right\} \text{im zweyten Falle. (Fig. 5.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_a = dPh \\ p_b = dPg \\ p_c = hPg \end{array} \right\} \text{im dritten Falle. (Fig. 6.)}$$

5. Die *Winkel am Pole* sind gleich den *Winkeln am Mittelpunkte der Grundfläche*, welche den *Umkreis* in denselben Punkten schneiden. (Fig. 1. 2. 3.)

Weil die Ebene eines durch den Pol gehenden grossen Kreises senkrecht auf der Grundfläche des Segmentes und eben so auf der Ebene stehet, welche das Segment am Pole berührt, in welcher letztern alle von Tangenten grosser Kreise gebildeten *Winkel am Pole* liegen,

so ist

$$b P m = b p m = b' p' m' = b'' p'' m'' \dots$$

$$n P m = n p m = n' p' m' = n'' p'' m'' \dots$$

oder nach der angenommenen Bezeichnungsart (4.):

$$P_a = p_a = p'_a = p''_a = p'''_a \dots$$

$$P_b = p_b = p'_b = p''_b = p'''_b \dots$$

$$P_o = p_o = p'_o = p''_o = p'''_o \dots$$

in allen möglichen Segmenten.

Abstammung der sphärischen Drey- ecke und allgemeine Gleichungen ihrer Excedenten.

6. *Ein sphärisches Dreyeck des ersten Fal-
les entsteht aus einem rechtwinkligen Sehnen-
dreyecke. (Fig. 1.)*

Wenn die Sehne $b'c'$ einem grossen Kreis-
bogen $b'p'c'$ angehört, dessen Punkt p' der Pol
des Kugel-Segmentes ist, so bildet sie zugleich
den Durchmesser bc der Grundfläche dieses
Segmentes und der ihr gegenüber stehende
Sehnenwinkel ist

$$a = 90^\circ.$$

7. Wenn x im Allgemeinen das Mafs eines
sphärischen oder Tangenten-Winkels und y
einen *Excedenten* bedeutet; wenn ferner die
wachsenden Werthe des *Halbmessers* in der er-
wähnten Voraussetzung (2.)

$$R, R', R'', R''' \dots$$

die davon abhängenden *ab- oder zunehmen-
den* Werthe der von einem *Sehnenwinkel* a
abstammenden *sphärischen oder Tangenten-
Winkel*

$$x_a, x'_a, x''_a, x'''_a \dots$$

und die veränderlichen Werthe der Excedenten

$$y_a, y'_a, y''_a, y'''_a \dots$$

bezeichnet werden, so ist $a + y'_a = x'_a$,
wenn der Halbmesser des Segmentes $= R'$ ist
u. s. w.

Der Ausdruck für den *Excedenten* des
größten Winkels a (Fig. 1) in einem Dreyecke
des ersten Falles ist also in jedem Segmente

$$y'_a = x'_a - 90^\circ \quad (6.)$$

$$y''_a = x''_a - 90^\circ \text{ u. s. w.}$$

8. Jeder der beyden kleinern Winkel in ei-
nem Dreyecke des ersten Falles entspricht ei-
nem Sehnenvinkel, welcher dem Complementary
seines Winkels am Pole gleich ist. (Fig. 1.)

Weil nämlich das ebene Dreyeck bPM , auf
der Grundfläche des Segmentes, in M recht-
winklig ist, so ist der Sehnenvinkel

$$b = 90^\circ - P_b = 90^\circ - p_b \\ = 90^\circ - p'_b = 90^\circ - p''_b \dots \quad (5.)$$

9. Der *Excedent* eines der beyden kleinern
Winkel des ersten Falles ist gleich seinem
Tangenten-Winkel, mehr seinem Winkel am
Pole, weniger 90° ;

$$\text{indem } y'_b = x'_b - b \quad (7.)$$

$$\text{und } b = 90^\circ - p'_b \quad (8.)$$

$$\text{und folglich } y'_b = x'_b + p'_b - 90^\circ.$$

10. In einem sphärischen Dreyecke des ersten Falles, oder in einem rechtwinkligen Sehnendreyecke, ist der Excedent des größten Winkels gleich der Summe der beyden andern Excedenten. (Fig. 1. 4.)

Diese Summe ist nämlich:

$$y'_b + y'_c = x'_b + x'_c + p'_b + p'_c - 180^\circ \quad (9.)$$

$$\text{da aber } p'_b = 90^\circ - b, \quad p'_c = 90^\circ - c \quad (8.)$$

$$\text{und } b + c = 90^\circ \quad (\text{Fig. 1.})$$

$$\text{so wird } p'_b + p'_c = 90^\circ \quad \text{und}$$

$$y'_b + y'_c = x'_b + x'_c - 90^\circ.$$

Da nun (Fig. 4) wegen Gleichheit der Bögen

$$pb = pa = pc,$$

die sphärischen Dreyecke pba und pca gleichschenkelig sind, woraus $i = k$, $l = m$ folgt;

$$\text{da ferner } x'_a = k + l,$$

$$x'_b = i,$$

$$x'_c = m,$$

$$\text{so ist } x'_a = x'_b + x'_c$$

$$\text{und } y'_b + y'_c = x'_a - 90^\circ = y'_a. \quad (7.)$$

11. Die Dreyecke des zweyten Falles stammen von spitzwinkligen Sehnendreyecken ab. (Fig. 2.)

Wenn der grofse Kreisbogen $a' M' c'$ oder $a'' M'' c''$ in irgend einem Segmente, dem größten

Winkel des sphärischen Dreyecks gegenüber, so liegt, daß der Pol zwischen diesem Bogen und dem Scheitel des Winkels eingeschlossen ist, so muß auch in dem, auf der Grundfläche des Segmentes bestehenden Sehnendreyecke abc , der Mittelpunkt P zwischen der größten Seite ac und dem größten Winkel b liegen, welches nur Statt finden kann, wenn der größte Winkel kleiner als 90° ist.

12. Denkt man ein solches Dreyeck des zweyten Falles in einer Kugel, deren Halbmesser gleich dem Halbmesser des Sehnendreyeckes ist, $R = Pa$ (Fig. 2), so wird das Segment des sphärischen Dreyecks die Halbkugel seyn. Die bey a, b, c entstehenden sphärischen oder Tangenten-Winkel sind jeder zu 180° , zusammen $= 540^\circ$.

Die Summe der Excedenten ist daher

$$\begin{aligned} x_a + x_b + x_c &= x_a + x_b + x_c - a - b - c \\ &= 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

Die Summe der großen Kreisbögen ist ebenfalls

$$ab + bc + ca = 360^\circ.$$

Der Flächeninhalt eines solchen Dreyecks endlich, welches das ganze Segment erfüllt, ist offenbar gleich dem Inhalte der Halbkugel-fläche, oder dem doppelten Inhalte der Grundfläche seines Segments.

13. Es ist wahr, daß die sphärische Figur unter diesen Bedingungen, eigentlich *kein Dreyeck* nach der gewöhnlichen Definition ist, wonach jeder Winkel $< 180^\circ$, und die Summe der drey Bögen $< 360^\circ$ seyn soll. Jedoch muß diese *äußerste Gränze der Möglichkeit sphärischer Dreyecke* als ein solches betrachtet werden, damit ohne Ausnahme oder Lücke dargethan sey, was von sphärischen Dreyecken im Allgemeinen behauptet wird; ungefähr so wie man nicht umhin kann, die Parabel als erste Hyperbel oder letzte Ellipse anzusehen.

14. In der That, vermehre man den Halbmesser R der Kugel nur um einen *beliebig kleinen* Theil δR , ohne das Sehnendreyeck abc und seinen Halbmesser Pa zu verändern, so wird alsobald das Segment kleiner als die Halbkugel, die Bögen nicht mehr in einem und demselben großen Kreise, folglich zusammen $< 360^\circ$, die Winkel und das sphärische Dreyeck selbst, der Definition völlig genügend seyn.

15. Je größer nun die Kugelhalbmesser R' , R'' , R''' , desto kleiner werden die sphärischen Winkel x' , x'' , x''' , bis man durch Annahme eines *relativ unendlich großen Halbmessers* an die *entgegengesetzte Gränze* der Denckbarkeit sphärischer Dreyecke gelangt, wo die sphärischen Winkel den Sehnenswinkeln, die Bögen den Sehnen, und der Flächeninhalt des Seg-

ments der Grundfläche gleich zu achten sind, die Excedenten aber relativ unendlich klein werden.

Zwischen diesen beyden Gränzen liegen nun alle von irgend einem gegebenen Sehnendreyecke abstammenden sphärischen, und es ist Keines denkbar, das von den sich ergebenden Gesetzen ausgenommen seyn könnte.

16. *In Dreyecken des zweyten Falles ist der Excedent jedes Winkels gleich dessen Tangenten-Winkel, mehr dessen Winkel am Pole, weniger 180° . (Fig. 2.)*

Die zum Sehnenswinkel a gehörigen Tangentenwinkel $x_a, x'_a, x''_a, x'''_a \dots$ haben in allen Segmenten gleiche *Winkel am Pole*, deren Werth $P_a = p_a = p'_a$ u. s. w. dem ebenen Winkel MPN oder mPn gleich ist. (5.)

Da aber in dem Vierecke $PNaM$ zwey rechte Winkel M und N sind, so ist

$$(1.) \quad a = 180^\circ - p_a \text{ in der Ebene,} \\ \text{oder } x_a - y_a = 180^\circ - p_a \text{ in der Halbkugel.}$$

Der Excedent des Winkels a ist also für das Halbkugeldreyeck (12.)

$$y_a = x_a + p_a - 180^\circ,$$

oder allgemein:

$$y = x + p - 180^\circ.$$

Wird dann der zunehmende Halbmesser
 $R + \delta R = R'$, $R + \delta' R = R''$, $R + \delta'' R = R'''$, ...
 so wird der eben so beständig abnehmende
 Tangenten-Winkel

$$x - \delta x = x', \quad x - \delta' x = x'', \quad x - \delta'' x = x''' \dots$$

$$\text{oder } a + y_a - \delta' x_a = x''_a;$$

$$\text{da aber auch } a + y''_a = x''_a,$$

$$\text{so ist allgemein: } y'' = y - \delta' x$$

$$\text{oder } y'' = x + p - 180^\circ - \delta' x;$$

und hieraus folgt für alle Segmente

$$(II.) \quad y'' = x' + p - 180^\circ.$$

17. *In Dreyecken des zweyten Falles und in spitzwinkligen Sehnendreyecken ist jeder Excedent positiv.* (Fig. 2.)

Das sphärische Viereck $p' N' a' M'$ hat zwey rechte Winkel, $N' + M' = 180^\circ$; der dritte Winkel in p' ist $= p_a$, der vierte in $a' = x'_a$ nach der bereits festgesetzten Bezeichnung.

Da aber die Summe der Winkel eines sphärischen Vierecks immer gröfser als 360° ist,

$$N' + M' + p_a + x'_a > 360^\circ,$$

$$\text{so wird } p_a + x'_a > 180^\circ \text{ seyn,}$$

und folglich y'_a einen bejahenden Werth erhalten. (16.)

18. *Die Dreyecke des dritten Falles stammen von stumpfwinkligen Sehnendreyecken ab.* (Fig. 3.)

Wenn nämlich der Pol p' aufser dem Raume liegt, welchen die grofsen Kreisbögen $a'b'$, $b'c'$, $c'a'$ umschliessen, so mufs auch auf der Grundfläche des Segments der Mittelpunkt P aufser dem Sehnendreyecke abc liegen, und es wird dann der gröfsten Seite ab immer ein stumpfer Winkel gegenüber seyn.

19. Der gröfste sphärische oder Tangenten-Winkel x_c eines Dreyecks des dritten Falles (Fig. 3) abc in der Halbkugel, als dem gröfsten Segmente, wird an der Grundfläche von den Bögen cma , clb gebildet, und ist $x_c = 180^\circ$.

Die beyden andern aber sind $= 0$; denn x_b hat die *sich deckenden* Bögen blc , bna , und eben so x_a die Bögen amc , anb zu Schenkeln.

Die Summe der drey Winkel ist also

$$x_c + x_b + x_a = 180^\circ.$$

Der Excedent des stumpfen Winkels ist $y_c = 180^\circ - c$; die beyden andern sind

$$y_b = 0 - b \quad \text{und} \quad y_a = 0 - a;$$

die Summe der Excedenten ist daher

$$y_c + y_b + y_a = 180^\circ - a - b - c = 0.$$

Die Summe der drey grofsen Kreisbögen ist gleich dem doppelten Werthe des Gröfsten:

$$cma + clb + bna = 2bna.$$

Der Flächeninhalt des Dreyecks endlich, ist wie die Summe der Excedenten $= 0$, weil die sich deckenden Bögen keinen Raum einschließen.

20. Der geringste Werth von δR , um welchen der Halbmesser des Segments bey unveränderter Grundfläche vermehrt wird, bringt auch hier ein wirkliches sphärisches Dreyeck hervor. Der größte Bogen $bn a$ wird kleiner als die Summe der beyden andern, der Winkel x_c kleiner als 180° ; x_b , x_a erhalten, so wie der Flächeninhalt des Dreyecks, positiven Werth, und der positive Excedent y_c wird größer als die negative Summe von y_b und y_a .

21. Der größte Winkel x_c ist, bey fortgesetztem Wachsen des Halbmessers, ununterbrochen abnehmend, und erhält nach und nach alle zwischen 180° und dem Mafse seines Sehnenwinkels c liegenden Werthe.

Die Summe der kleinern Winkel $x_b + x_a$ hingegen, ist beym Wachsen des Halbmessers zunehmend, und durchläuft die Werthe zwischen 0 und $180^\circ - c$.

22. Bey diesem Abnehmen des großen Winkels und Zunehmen der Summe der beyden kleinern, muß es für jedes stumpfwinklige Stamm-dreyeck ein eigenes Segment geben, worin der Flächeninhalt des abstammenden sphärischen

Dreyecks, die Summe der drey Tangenten-Winkel, und die Summe der Excedenten am Größten werden. Von dieser *Mittelgränze* angefangen, nimmt bey weiterem Zunehmen des Halbmessers die Summe der Winkel wieder ab bis auf 180° ; der Flächeninhalt aber und die Summe der Excedenten vermindern sich bis zum relativ unendlich Kleinen.

23. *In Dreyecken des dritten Falles ist der Excedent des stumpfen Winkels gleich dessen Tangenten - Winkel, mehr dessen Winkel am Pole, weniger 180° . (Fig. 3.)*

Aus denselben Gründen, wie im zweyten Falle, wird hier

$$c = 180^\circ - p_c = x_c - y_c, \quad (16.)$$

und daraus folgt für die Halbkugel

$$y_c = x_c + p_c - 180^\circ$$

und für alle Segmente

$$y_c'' = x_c'' + p_c - 180^\circ.$$

24. *In Dreyecken des dritten Falles ist der Excedent jedes spitzigen Winkels gleich dessen Tangenten-Winkel, weniger dessen Winkel am Pole. (Fig. 3.)*

In der Halbkugel ist der Tangenten-Winkel

$$\left. \begin{array}{l} x_a = 0 \\ \text{und der Excedent } y_a = -a \end{array} \right\} (19.)$$

Der Sehnenwinkel a aber ist wegen der bey N und M rechtwinkligen Dreyecke ePN , $e a M$ auf der Grundfläche, dem Winkel mPn am Mittelpunkte gleich, folglich auch dem Winkel am Pole p_a (5.)

$$(I.) \quad a = p_a = x_a - y_a.$$

Der Excedent des Winkels a ist also für das Halbkugeldreyeck (19.)

$$y_a = x_a - p_a.$$

Weil aber x_a bey der geringsten Vermehrung des Halbmessers einen positiven Werth erhält, welcher bey weiterem Wachstume des Halbmessers immer zunimmt (21.)

$$x'_a = x_a + \delta x_a,$$

$$x''_a = x_a + \delta' x_a \text{ u. s. w.,}$$

$$\text{so wird } x''_a = a + y_a + \delta' x_a = a + y''_a,$$

$$\text{und } y''_a = y_a + \delta' x_a$$

$$\text{oder } y''_a = x_a - p_a + \delta' x_a,$$

daher für alle Segmente:

$$(II.) \quad y''_a = x''_a - p_a,$$

$$\text{und eben so } y''_b = x''_b - p_b.$$

Geometrischer Werth der Excedenten und Entwurfswinkel.

25. Jedes sphärische *Dreyeck* des ersten Falles wird durch die vom Pole auf den Scheitel des grossen Winkels und auf die Mitte der Schenkel fallenden Bögen in vier rechtwinklige *Poldreyecke* getheilt, wovon immer jene zwey einander gleich sind, welche an einer Seite des Dreyecks liegen, und an einem gemeinschaftlichen Punkte rechtwinklig sind. (Fig. 4.)

Wenn man sie nach den *Gegenwinkeln* der Seiten benennt, auf welchen sie senkrecht stehen, so ist

$$D = E = \Delta_c \quad \text{und} \quad F = G = \Delta_b.$$

Jene Winkel, wovon ein Schenkelbogen durch den Pol geht, umfassen also nur ein *Poldreyeck*, nämlich

$$\begin{array}{ll} \text{der Winkel } b \text{ das Dreyeck} & D = \Delta_c, \\ \text{und } c & \text{„} \quad G = \Delta_b. \end{array}$$

Alle vier *Poldreyecke* in einem Dreyecke des ersten Falles sind positiv, indem ihre positive Summe dem Flächeninhalte des ganzen Dreyecks gleich ist

$$2\Delta_b + 2\Delta_c = abc.$$

26. Jedes *Dreyeck des zweyten Falles* (Fig. 5) besteht aus *sechs positiven Poldreyecken*, weil die Theilungsbögen nach drey Scheiteln und nach der Mitte dreyer Schenkel gehen.

Diese sind, wie die vorigen, alle rechtwinklig, auch zwey und zwey einander gleich und ähnlich.

$$Pad = Pdb = E = \Delta_c,$$

$$Paf = Pfc = F = \Delta_b,$$

$$Pce = Pbe = G = \Delta_a,$$

$$2\Delta_c + 2\Delta_b + 2\Delta_a = abc.$$

Jeder Winkel, zwischen dessen Schenkeln der Pol des Dreyecks liegt, umfängt also zwey positive Poldreyecke; nämlich

a die Dreyecke $\Delta_b + \Delta_c$, (Fig. 4. 5.)

b " $\Delta_a + \Delta_c$ } (Fig. 5.)

c " $\Delta_a + \Delta_b$ }

27. In *Dreyecken des dritten Falles* (Fig. 6.) sind *sechs Poldreyecke*, wovon die vier an den zwey kleinern Seiten des Dreyecks liegenden positiv sind, und den Flächeninhalt um so viel übersteigen, als die zwey der grossen Seite anliegenden negativ betragen, so dafs die Summe aller sechs immer positiv, und dem ganzen Dreyecke vollkommen gleich ist. Wie alle Vorhergehenden, sind auch diese rechtwinklig, und zwey und zwey einander gleich und ähnlich.

$$Pbd = Pad = \Delta_c,$$

$$Pah = Pch = \Delta_b,$$

$$Pbg = Pcg = \Delta_a,$$

$$2\Delta_c + 2\Delta_b = Pbac$$

$$- 2\Delta_a = - Pbc,$$

$$2\Delta_c + 2\Delta_b - 2\Delta_a = abc.$$

Da die Schenkel des grossen Winkels a (Fig. 6.) den Pol einschliessen, so umfängt derselbe die zwey positiven Poldreyecke $\Delta_c + \Delta_b$.
(26.)

28. Jeder Winkel, welcher den Pol ausschliesst, d. i. jeder spitzige Winkel in einem Dreyecke des dritten Falles, umfängt ein positives und ein negatives Poldreyeck. (Fig. 6.)

Der Winkel b im Dreyeck abc hat nämlich auf seinem äussern oder kleinern Schenkel das Poldreyeck

$$+ Pbd = (L + D) = \Delta_c,$$

und auf dem innern grossen Schenkel

$$- Pbg = - (L + G) = - \Delta_a;$$

es umfängt also (27.)

b die Figur $\Delta_c - \Delta_a = D - G = bmn d$

(wenn $imn = Pig = G$ gedacht wird),

und zwar $+ bmn d$, wenn $\Delta_c > \Delta_a$ ist.

Der Winkel c in eben diesem Dreyeck hat

$$\begin{aligned} + Pch &= (E + F) = \Delta_b \text{ und} \\ - Pcg &= -(M + F) = -\Delta_a, \text{ folglich} \\ c \text{ die Figur } \Delta_b - \Delta_a &= M - E = Pgsr \\ &(\text{wenn } rse = ceh = E), \\ \text{und zwar } -Pgsr, &\text{ wenn } \Delta_b < \Delta_a \text{ ist.} \end{aligned}$$

29. *Der Excedent eines sphärischen Winkels verhält sich zur Peripherie, wie der Flächeninhalt seiner Poldreyecke zur Halbkugel.*

I. Fall. (Fig. 4.) Der Excedent eines der beyden kleinern Winkel in einem Dreyecke des ersten Falles ist

$$y_b = x_b + p_b - 90^\circ. \quad (9.)$$

In einem rechtwinkligen sphärischen Dreyecke ist die Summe der Excedenten gleich der Summe der zwey schiefen Winkel, weniger 90° . Das Dreyeck D ist bey d rechtwinklig; der Winkel i ist gleich x_b , und der Winkel am Pole gleich p_b ; also ist, wenn man statt D das Poldreyeck Δ_c setzt (25.), und die Summe der Excedenten desselben mit $y_{(\Delta_c)}$ bezeichnet:

$$y_{(\Delta_c)} = x_b + p_b - 90^\circ$$

$$\text{und } y_{(\Delta_c)} = y_b.$$

Es verhält sich aber, wie bekannt, die Summe der Excedenten eines sphärischen Dreyecks zur Peripherie, wie der Flächeninhalt desselben zur Halbkugel, oder

$$\gamma_{(\Delta_c)} : 360^\circ = \Delta_c : H,$$

wenn H den Flächeninhalt der Halbkugel bedeutet; und folglich ist

$$\gamma_b : 360^\circ = \Delta_c : H.$$

Der Excedent des großen Winkels in einem Dreyecke des ersten Falles ist

$$\gamma_a = x_a - 90^\circ. \quad (7.)$$

In einem sphärischen Vierecke von drey rechten Winkeln ist die Summe der Excedenten gleich dem vierten Winkel, weniger 90° . Nun sind in dem Vierecke

$$(E + F) = (\Delta_b + \Delta_c) \text{ (Fig. 4.) die Winkel}$$

$$d = P = e = 90^\circ, \quad (1. 5.)$$

$$\text{daher } \gamma_{(\Delta_b + \Delta_c)} = x_a - 90^\circ, \text{ weil } k + l = x_a$$

$$\text{und } \gamma_a : 360^\circ = (\Delta_b + \Delta_c) : H.$$

II. Fall. (Fig. 5.) Der Excedent jedes Winkels in Dreyecken des zweyten Falles ist

$$\gamma_a = x_a + p_a - 180^\circ. \quad (16.)$$

In einem sphärischen Vierecke von zwey rechten Winkeln ist die Summe der Exceden-

ten gleich der Summe der beyden schiefen Winkel, weniger 180° . Nun ist das Viereck $adPf = E + F$ (Fig. 5) oder $\Delta_b + \Delta_c$ bey d und f rechtwinklig (1.); die schiefen Winkel sind

$$(k + l) = x_a$$

$$\text{und } (h + i) = p_a;$$

also die Summe der Excedenten

$$y_{(\Delta_b + \Delta_c)} = x_a + p_a - 180^\circ = y_a,$$

und wie im ersten Falle:

$$y_a : 360^\circ = (\Delta_b + \Delta_c) : H.$$

III. Fall. (Fig. 6.) Der grofse Winkel in Dreyecken des dritten Falles unterliegt denselben Gesetzen wie die Winkel des zweyten Falles. (23. 27.)

Die Poldreyecke $\Delta_b + \Delta_c$ bilden das Viereck $Pdah$ oder $A + B$, weil $A = Pda = \Delta_c$ und $B = Pha = \Delta_b$; und so ist wie oben:

$$y_a : 360^\circ = (\Delta_b + \Delta_c) : H$$

$$\text{oder } y_a = \frac{360^\circ (\Delta_b + \Delta_c)}{H}.$$

Der Excedent eines spitzigen Winkels in Dreyecken des dritten Falles ist

$$y_b = x_b - p_b, \quad (24.)$$

$$x_b = ibd, \quad p_b = iPg. \quad (\text{Fig. 6.})$$

Das positive Poldreyeck des Winkels b ist

$Pbd = (L + D) = \Delta_c$, und das negative

$$Pbg = (L + G) = \Delta_a. \quad (28.)$$

Die Summe der Excedenten aber ist in einem rechtwinkligen sphärischen Dreyecke, gleich der Summe der zwey schiefen Winkel, weniger 90° . Es ist daher

$$y_{(\Delta_c)} = y_{(L+D)} = x_b + k + l - 90^\circ$$

und

$$-y_{(\Delta_a)} = -y_{(L+G)} = -p_b - k - l + 90^\circ,$$

welche zusammen

$$y_{(\Delta_c - \Delta_a)} = y_{(D-G)} = x_b - p_b = y_b$$

geben; und endlich

$$y_b : 360^\circ = (\Delta_c - \Delta_a) : H$$

$$\text{oder } y_b = \frac{360^\circ (\Delta_c - \Delta_a)}{H}.$$

30. Wenn sich die sechs Tangenten $e'r'$, $d'r'$, $d's'$, $f's'$, $f't'$, $e't'$ (Fig. 8) eines sphärischen Dreyecks $d'e'f'$ senkrecht auf der Ebene der Sehnen def entwerfen, so entstehen an jeder Seite zwey gleiche Entwurfswinkel, z. B. tef , tfe , welche hier mit z im Allgemeinen bezeichnet, und wie die Seite selbst, nach dem Gegenwinkel d benannt werden:

$$z_a = tef = tfe;$$

eben so an der Seite ac oder B (Fig. 7.):

$$z_b = sac = sca \text{ u. s. w.}$$

Der Tangenten-Winkel $r'a's'$ oder x_a wird durch den Entwurf, gleich seinem Sehnenwinkel a , mehr den beyden anliegenden Entwurfswinkeln seiner Schenkel, und heist *entwurfner Winkel*:

$$u_a = a + z_b + z_c = ras. \text{ (Fig. 7.)}$$

Der Tangenten-Winkel $r'e't'$ oder x_e (Fig. 8) verwandelt sich in den Entwurfnen:

$$u_e = e + z_d + z_f = ret, \text{ u. s. w.}$$

Weil aber die Entwurfswinkel tih , thi oder z_g (Fig. 9) inner das Sehnendreyeck fallen, und folglich *negativ* sind, so wird aus dem Tangenten-Winkel $t'i's'$ oder x_i ein Entwurfner:

$$u_i = i + z_h - z_g = tis;$$

und aus $r'h't'$ oder x_h ein Entwurfner:

$$u_h = h + z_i - z_g = rht.$$

31. Wenn der Sehnenwinkel $a = 90^\circ$ ist (Fig. 7), so steht t' , der Durchschnittspunkt der Tangenten, senkrecht über dem Pole, und daher t , der Entwurfspunkt desselben, genau auf dem Punkte n , welcher die Sehne bc gleich

theilt, und der Mittelpunkt des Sehnendreyecks ist; folglich werden die Entwurfswinkel Null.

$$z_a = t b n = t c n = 0.$$

Wenn der Sehnenwinkel d spitzig ist (Fig. 8), so steht t' jenseits des Poles P , und der Entwurfspunkt t aufer dem Sehnendreyecke; daher werden die Entwurfswinkel an der gegenüberstehenden Seite *positiv*.

$$z_a = t e n = t f n.$$

Wenn endlich der Sehnenwinkel g (Fig. 9) stumpf ist, so ist t' zwischen g' und P , also diesseits des Poles; und der Entwurfspunkt t inner dem Sehnendreyecke, weil die Ebene $t' h' i'$ einwärts geneigt ist.

Die Entwurfswinkel an der Gegenseite

$$z_g = t h n = t i n$$

sind also einwärts liegend, folglich *negativ*.

32. Spitzige Winkel in Dreyecken des dritten Falles müssen einen positiven und einen negativen anschliessenden Entwurfswinkel haben. (Fig. 9.)

Die anschliessenden Entwurfswinkel des Winkels h' sind $r h g = z_i$ und $t h i = z_g$; z_i hat einen spitzigen Gegenwinkel i , und ist daher positiv;

z_g ist negativ, weil der Gegenwinkel g stumpf ist. (31.)

33. Die Tangente des Entwurfswinkels ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate der Seite in die Cotangente des Gegenwinkels, getheilt durch das vierfache Produkt aus dem Quadrate des Halbmessers in das Quadrat des Cosinus des halben Mittelpunktwinkels. (Fig.10.)

Der Halbmesser der Kugel sey $a'c = b'c = R$,

die Dreyeckseite $ab = a'b' = D$,

der halbe Mittelpunktwinkel $\frac{a'c b'}{2} = C_a$,

und folglich die Linie $n'c = R \cos C_a$; ferner:

m der Durchschnittspunkt der beyden Tangenten $a'm$ und $b'm$; die Linie $mn' = M$;

l der Entwurfspunkt von m auf der Ebene des Sehnendreyecks abd ; die Linie $ln = l'n' = W$;

der Neigungswinkel $cm l = f = cn'n = n'cc'$;

die Senkrechte $cn = E$; und die Entwurfswinkel $lab = lba = z_a$, $kbd = kdb = z_a$,

$iad = ida = z_b$.

Wegen der rechten Winkel $ma'c$ und $a'n m$ sind die Dreyecke ähnlich, und daher ist

$$R \cos C_a : \frac{D}{2} = \frac{D}{2} : M,$$

$$(I.) \quad M = \frac{D^2}{4 R \cos C_a},$$

$$R \cos C_a \sin f = E = \frac{D}{2} \text{Tang } g,$$

$$d = h, \text{ folglich } \text{Tang } g = \text{Cot } d;$$

$$(II.) \quad \text{und} \quad E = \frac{D}{2} \cot d,$$

$$\sin f = \frac{D \cot d}{2 R \cos C_a},$$

$$W = M \sin f = \frac{M D \cot d}{2 R \cos C_a};$$

$$(III.) \quad \text{oder} \quad W = \frac{D^3 \cot d}{8 R \cos^2 C_a}; \quad (I.)$$

weil aber auch $\frac{D}{2} \text{Tang } z_a = W$, so ergibt sich:

$$(IV.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tang } z_a = \frac{D^2 \cot d}{4 R^2 \cos^2 C_a}, \\ \text{Tang } z_a = \frac{A^2 \cot a}{4 R^2 \cos^2 C_a}, \\ \text{Tang } z_b = \frac{B^2 \cot b}{4 R^2 \cos^2 C_b}. \end{array} \right.$$

Anwendung auf alle Arten von Sehnenwinkeln in sphärischen und geodetischen Segmenten.

34. *Im sogenannten Halbkugeldreyecke ist der Excedent gleich der Summe der zwey anliegenden Entwurfswinkel. (Fig. 2.)*

Weil nämlich die Bögen dieses Dreyecks sammt ihren Tangenten in der Ebene der Sehnen liegen, so ist der Tangenten-Winkel x und der Entworfne u einerley:

$$x_a = u_a = 180^\circ = s + t + a, \quad (12.)$$

also ist auch

$$x_a - a = s + t = u_a - a$$

$$\text{oder } \gamma_a = z_b + z_c; \quad (30.)$$

und bey spitzigen Winkeln in Dreyecken des dritten Falles (Fig. 3)

$$\gamma_a = z_b - z_c,$$

weil $x_a = 0$ (19.) und einer der beyden Entwurfswinkel negativ ist. (32.)

35. *Im Octaëdrum ist jeder Entwurfswinkel einem Excedenten, und die Summe aller sechs Entwurfswinkel der doppelten Summe der drey Excedenten gleich. (Fig. 13.)*

Die Bögen der Dreyecke, welche das Achtdreyeck (Octaëdram) bilden, sind Viertelkreise; jeder Sehnwinkel eines solchen Dreyecks ist

$$a = b = d = 60^\circ,$$

jeder Tangenten-Winkel

$$x_a = x_b = x_d = 90^\circ,$$

folglich jeder Excedent

$$y_a = y_b = y_d = 30^\circ.$$

Der halbe Mittelpunktwinkel ist

$$C_a = 45^\circ,$$

folglich $\text{Cos } C_a = \text{Sin } C_a = \frac{A}{2}$

und $\text{Cos}^2 C_a = \frac{A^2}{4};$

weil aber $\text{Tang } z_a = \frac{A^2 \text{ Cot } a}{4 R^2 \text{ Cos}^2 C_a}, \quad (33. \text{ IV.})$

so ist $\text{Tang } z_a = \text{Cot } a \dots\dots (R = 1)$

und $z_a = 30^\circ$

oder $z_a = z_b = z_d = y_a = y_b = y_d.$

36. Wenn man unter einem *geodetischen Segmente* ein kreisförmig begränztes Stück der Erdoberfläche versteht, dessen Durchmesser verhältnißsmäfsig sehr klein ist (ungefähr so, daß ein Signal von einem Ende zum andern gesehen werden könnte), so sind in jedem geodetischen Segmente, die Flächeninhalte der eingeschlosse-

nen Sehnendreyecke gleich den Flächeninhalten der davon abstammenden sphärischen zu erachten, weil die Quer-Sinus der halben Mittelpunktswinkel ihrer Sehnen äußerst klein sind. Eben so sind auch Bogen, Sinus und Tangente eines *geodetischen Entwurfswinkels*, indem sie nur Sekunden betragen können, für gleich anzusehen:

$$\text{Tang } z_d = z_d = \frac{D^2 \text{Cot } d}{4 R^2 \text{Cos}^2 C_d} \quad (33. \text{ IV.})$$

Bey einem äußerst kleinen Werthe von Quer-Sin C_d wird aber

$$R \text{Cos } C_d = R,$$

folglich der Entwurfswinkel

$$z_d = \frac{D^2 \text{Cot } d}{4 R^2}.$$

37. *In einem geodetischen Segmente ist der Excedent jedes Winkels gleich der halben Summe der zwey anliegenden Entwurfswinkel. (Fig. 10.)*

Wenn dba in einem Segmente liegt, welches den vorgenannten Bedingungen entspricht (36.), so ist die Summe der dem Sehnswinkel a anliegenden Entwurfswinkel

$$z_d \pm z_b = \frac{D^2 \text{Cot } d \pm B^2 \text{Cot } b}{4 R^2}.$$

Unter eben dieser Voraussetzung ist auch der Flächeninhalt eines Poldreys Δ_a gleich dem entsprechenden ebenen Dreys acn :

$$\Delta_a = acn = \frac{D \times E}{4};$$

$$\text{da nun } E = \frac{D \cot d}{2}, \quad (33. \text{ II.})$$

$$\text{so ist } \Delta_a = \frac{D^2 \cot d}{8},$$

$$\text{und eben so } \Delta_b = \frac{B^2 \cot b}{8}.$$

Der allgemeine Ausdruck des Excedenten aber ist:

$$\gamma_a = \frac{360^\circ (\Delta_a \pm \Delta_b)}{H}, \quad (29.)$$

und weil $\frac{360^\circ}{H} = \frac{1}{R^2}$, wenn H den Flächeninhalt der Halbkugel bezeichnet; so findet sich der *geodetische Excedent*:

$$\gamma_a = \frac{D^2 \cot d \pm B^2 \cot b}{8 R^2} = \frac{z_a \pm z_b}{2}.$$

38. *In geodetischen Dreys verhalten sich die Poldreys wie die Produkte aus Sinus und Cosinus ihrer Gegenwinkel, und folglich die Excedenten wie die Summen der Produkte aus Sinus und Cosinus der beyden Mitwinkel. (Fig. 10.)*

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreyecks $b c n$ oder (36.) des Poldreyecks Δ_a ist das halbe Produkt aus Sinus und Cosinus des Winkels h und dem Halbmesser r oder $c b$.

Es ist aber $h = d$, und also

$$\Delta_a = \frac{r \sin d \cos d}{2}, \text{ und eben so}$$

$$\Delta_a = \frac{r \sin a \cos a}{2},$$

$$\Delta_b = \frac{r \sin b \cos b}{2}.$$

Daher besteht das Verhältniß

$$\Delta_a : \Delta_b : \Delta_c =$$

$$= \sin a \cos a : \sin b \cos b : \sin d \cos d;$$

weil aber auch (29.) die Excedenten sich verhalten wie die Summen der nach beyden *Mitwinkeln* benannten Poldreyecke, nämlich:

$$y_a : y_b : y_c =$$

$$= (\Delta_b \pm \Delta_d) : (\Delta_a \pm \Delta_d) : (\Delta_a \pm \Delta_b),$$

so folgt einleuchtend:

$$y_a : (\sin b \cos b \pm \sin d \cos d) =$$

$$y_b : (\sin a \cos a \pm \sin d \cos d) =$$

$$y_c : (\sin a \cos a \pm \sin b \cos b).$$

39. *In allen geodetischen Dreyecken des ersten Falles sind die Excedenten der beyden spitzigen Winkel einander gleich, und jeder ist $\frac{1}{4}$ der Summe aller drey Excedenten. (Fig. 1.)*

Wenn in dem Dreyecke abc der Winkel $a = 90^\circ$ ist, so folgt

$$\sin b = \cos c \quad \text{und} \quad \sin c = \cos b;$$

es verhalten sich aber die Excedenten:

$$\begin{aligned} & \gamma_b'''' : \gamma_o'''' = \\ & = (\sin c \cos c + 0) : (\sin b \cos b + 0) \quad (38.) \end{aligned}$$

indem $\sin a \cos a = 0$ ist;

$$\text{daher } \gamma_b'''' \sin b \sin c = \gamma_o'''' \sin b \sin c,$$

$$\text{und weil } \gamma_b'''' + \gamma_c'''' = \gamma_a'''', \quad (10.)$$

$$\text{so ergibt sich } \gamma_b'''' = \gamma_o'''' = \frac{\gamma_a'''' + \gamma_b'''' + \gamma_o''''}{4}.$$

40. Das Produkt aus Sinus und Cosinus ist bey 45° am größten. Je weiter ein spitziger Winkel unter oder über 45° ist, desto kleiner ist dieses Produkt.

Wenn $S^2 = \sin(45^\circ) \cos(45^\circ)$ ist;
wenn ferner φ das Abnehmen des Sinus,
und ψ das Zunehmen des Cosinus ausdrückt, so ist

$$2 S^2 = (S + \psi)^2 + (S - \varphi)^2 = r^2$$

$$\text{und } 2 S \varphi = 2 S \psi + \psi^2 + \varphi^2,$$

$$\text{oder } \varphi = \psi + \frac{\psi^2 + \varphi^2}{2 S},$$

$$\text{und folglich } \varphi > \psi.$$

Jedes Produkt aus Sinus und Cosinus eines spitzigen Winkels, welcher gröfser oder kleiner als 45° ist,

$$(S + \psi)(S - \varphi) = S^2 + S\psi - S\varphi - \psi\varphi,$$

zeigt sich also um $(S\varphi + \psi\varphi - S\psi)$ kleiner als S^2 , und wird um so kleiner, je gröfser man die Werthe φ und ψ annimmt.

Wenn nun $\pm \beta_a$, $\pm \beta_b$ das Bogenmafs bedeutet, um welches die Winkel a , b gröfser oder kleiner als 45° sind, so ist $\beta_a \gtrless \beta_b$,

$$\sin a \cos a \gtrless \sin b \cos b.$$

41. In jedem geodetischen Dreyecke des zweyten Falles hat der gröfsere zweyer Winkel den gröfsern Excedenten. (Fig. 2.)

In jedem Dreyecke von drey spitzigen Winkeln ist die Summe von zweyen

$$a + c > \frac{a + b + c}{2}.$$

Ist daher der eine Winkel c um β_c kleiner als 45° , oder

$$c + \beta_c = \frac{a + b + c}{4},$$

so mufs auch $a - \beta_a = \frac{a + b + c}{4}$

und $\beta_a > \beta_c$ seyn.

Wäre auch der kleinste Winkel des Dreyecks gröfser als 45° , so müfste ebenfalls,

$$\text{wenn } a > c,$$

$$\text{auch } \beta_a > \beta_c, \text{ und folglich (40.)}$$

$$\sin c \cos c > \sin a \cos a \text{ seyn.}$$

Nun ist das Verhältnifs der Excedenten (38.)

$$\gamma_a''' : \gamma_b''' =$$

$$(\sin b \cos b + \sin c \cos c) : (\sin b \cos b + \sin a \cos a)$$

und daher in einem spitzwinkligen geodetischen Dreyecke, wenn $a > c$,

$$\text{auch } \gamma_a''' > \gamma_c'''.$$

42. Da gleiche Sehnen eines Dreyecks in jedem Segmente gleichen Bögen angehören, so stammen von gleichseitigen Sehnendreyecken in allen Segmenten gleichseitige sphärische, und von gleichschenkligen Sehnendreyecken gleichschenklige sphärische ab; darum hat auch *jedes gleichseitige Dreyeck drey, und jedes gleichschenklige Dreyeck zwey gleiche Excedenten.*

Hieraus folgt jedoch nicht umgekehrt, daß jedes sphärische Dreyeck gleichseitig seyn müsse, wenn es drey gleiche Excedenten, oder gleichschenklig, wenn es deren zwey hat.

43. *Für zwey ungleiche Winkel eines spitzwinkligen Sehnendreyecks gibt es immer, unter den unendlich vielen von demselben abstammenden, ein sphärisches Dreyeck, in wel-*

chem ihre beyden Excedenten gleich sind.
(Fig. 2.)

Wenn im Sehnendreyecke abc

$$a > c$$

ist, so wird an der einen Gränze der Reihe sphärischer Dreyecke, im größten Segmente, nämlich in der Halbkugel, weil

$$\gamma_a = 180 - a \text{ und } \gamma_c = 180 - c \text{ ist,}$$

$$\gamma_a < \gamma_c \text{ seyn. (12.)}$$

Es ist aber auch $\gamma_a''' > \gamma_c'''$ an der entgegengesetzten Gränze dieser ununterbrochenen Reihe, nämlich in geodetischen Segmenten (41.); und daher müssen in irgend einem zwischen beyden liegenden Segmente, wegen des beständigen unmerklichen Abnehmens der Tangentenwinkel, die Excedenten $\gamma_a'' = \gamma_c''$ werden. (15.)

44. Jedes ungleichseitige, spitzwinklige Sehnendreyeck hat unter seinen abstammenden drey sphärische Dreyecke, wovon jedes zwey gleiche Excedenten enthält; und jedes gleichschenklige, spitzwinklige Sehnendreyeck hat ein sphärisches, in welchem alle drey Excedenten gleich sind.

Wenn nämlich ein Sehnendreyeck drey ungleiche, spitzige Winkel a, b, c hat, so gibt es ein Segment, in welchem (43.)

$$\gamma'_a = \gamma'_b \text{ ist;}$$

in einem andern wird $\gamma_b'' = \gamma_c''$,
und in einem dritten $\gamma_c''' = \gamma_a'''$.

Enthält aber ein spitzwinkliges Sehnen-
dreyeck def zwey gleiche Winkel $d = f$, so
ist in allen Segmenten

$$\gamma_a = \gamma_f, \quad (42.)$$

und es muß ein sphärisches Dreyeck geben (43.),
in welchem

$$\gamma_a'' = \gamma_e'' = \gamma_f'' \text{ wird.}$$

45. In einem Dreyecke des zweyten Falles,
mit zwey gleichen Winkeln und einem dritten,
dessen Sehnenwinkel dem halben Tangenten-
Winkel gleich ist, sind alle drey Excedenten
gleich, und die Summe der zwey gleichen Tan-
genten - Winkel, mehr der Summe ihrer Seh-
nenwinkel, ist 360° . (Fig. 11.)

Die zwey gleichen Tangenten - Winkel sind

$$x_b = x_e = w + r = v + s;$$

und der dritte, er sey gröfser oder kleiner als
jene, ist

$$x_a = 2a = 2\gamma_a = t + u.$$

Ferner, wegen der bey d und e rechtwink-
ligen, gleichen und ähnlichen vier sphärischen
Dreyecke, die Winkel

$$k = i = h = m, \text{ und auch}$$

$$t = u = r = s = a = \gamma_a = \frac{1}{2} x_a.$$

Die Winkel am Pole

$$\left. \begin{aligned} p_a &= i + h = m + k \\ \text{und } p_b &= p_c = k + l = m + n \end{aligned} \right\}. \quad (4.)$$

Der Winkel am Mittelpunkte der Grundfläche

$$bPc = 2bac = 2a = l + n; \quad (5.)$$

$$\text{und da } l = n = a = r = s,$$

so sind auch die zwey bey f rechtwinkligen sphärischen Dreyecke gleich und ähnlich den vier erstern, und die Winkel

$$w = v = m = k = \frac{1}{2}p_a,$$

$$\text{also } x_a + p_a = 2w + 2r,$$

$$x_b + p_b = k + l + w + r = 2w + 2r,$$

$$x_c + p_c = v + s + m + n = 2w + 2r,$$

$$\text{und } x_a + p_a = x_b + p_b = x_c + p_c$$

$$\text{oder } y_a = y_b = y_c. \quad (16.)$$

Da endlich

$$x_b = x_c = p_b = p_c = w + r = k + l$$

und zugleich

$$b + c = 180 - a = p_a, \quad (16. I.)$$

so ist

$$x_b + x_c + b + c = p_a + p_b + p_c = 360^\circ,$$

und abc ist ein *Regeldreyeck des zweyten Falles*, mit sechs gleichen positiven *Poldreyecken* und drey gleichen *Excedenten*.

46. *Stumpfe Regeldreyecke sind gleichschenklige sphärische Dreyecke des dritten Falles, deren drey Scheitelpunkte mit dem Pole zwey gleichseitige bilden. (Fig. 12.)*

Wenn nämlich die Bögen

$$ab = ac = aP = bP = cP$$

sind, so sind $abP = acP$ gleichseitige Dreyecke, und abc ist ein Regeldreyeck des dritten Falles.

47. *In jedem stumpfen Regeldreyecke, ist der Excedent des grossen Winkels gleich der dreyfachen Summe der beyden kleinern Winkel, weniger 180° . Die Excedenten der beyden kleinern Winkel sind Null. (Fig. 12.)*

Da die gleichseitigen Dreyecke $abP = acP$ durch die senkrechten Bögen Pd, Pe in vier gleiche und ähnliche Poldreyecke getheilt werden, so sind die Winkel am Pole

$$\frac{1}{2}p_a = p_b = p_c = b = c. \quad (24. \text{ I.})$$

Der stumpfe Tangenten - Winkel dae ist gleich dem gegenüberstehenden bPc (46.), also

$$x_a = 2p_a = 2b + 2c,$$

und sein Excedent

$$y_a = x_a + p_a - 180^\circ \quad (23.)$$

$$\text{oder } y_a = 3b + 3c - 180^\circ.$$

Der auf aP senkrechte Bogen bfc theilt die Dreyecke abP, acP ebenfalls in vier, den

vorgenannten positiven Poldreyecken vollkommen gleiche und ähnliche sphärische Dreyecke; daher sind die Winkel

$$x_b = x_o = \frac{dbP}{2} = \frac{ecP}{2} = p_b = p_o = b = c,$$

und ihre Excedenten

$$\gamma_b = \gamma_o = x_b - p_b = x_o - p_o \quad (24. \text{ II.})$$

oder $\gamma_b = \gamma_o = 0.$

48. Eine Seite und zwey Diagonalen des Icosaëdrischen Fünfecks bilden ein Regeldreyeck mit drey gleichen Excedenten, welches sich zum Flächeninhalte des grossen Kreises verhält wie 3 : 5. (Fig. 14.)

Wenn P eine der zwölf Spitzen im Zwanzigdreyeck (Icosaëdram), und folglich der gemeinschaftliche Scheitelpunkt von fünf gleichseitigen Dreyecken ist, deren Punkte A, B, C, D, E, P alle gleich entfernt vom Mittelpunkte der Kugel sind, so ist P zugleich der Pol des Segmentes, in welchem das sphärische Fünfeck $ABCDE$ begriffen ist.

Jeder Sehnwinkel dieser fünf Dreyecke ist

$$p = 60^\circ.$$

Jeder Tangenten-Winkel derselben ist gleich dem Mittelpunktswinkel des ebenen Fünfecks an der Grundfläche des Segments

$$x_p = 72^\circ,$$

also ein Excedent

$$\gamma_p = 12^\circ,$$

und die Summe der Excedenten aller fünf Dreyecke

$$15\gamma_p = 5 \times 36^\circ = 180^\circ.$$

Der Flächeninhalt des ganzen sphärischen Fünfecks ist daher gleich dem grossen Kreise.

Die grossen Kreisbögen $AC = AD$ sind Diagonalen dieses Fünfecks, und bilden mit der Seite DC das gleichschenklige sphärische Dreyeck des zweyten Falles ACD .

Die gleichseitigen sphärischen Dreyecke $PAB = PBC$ werden durch den Bogen AC in vier gleiche und ähnliche rechtwinklige getheilt, daher sind die sphärischen Winkel

$$PAC = BAC = \frac{1}{2}x_p = 36^\circ,$$

und eben so die Winkel

$$PAD = EAD = \frac{1}{2}x_p = 36^\circ.$$

Der Tangenten-Winkel DAC ist daher

$$x_a = PAC + PAD = x_p = 72^\circ,$$

und der Sehnenwinkel DAC gleich dem halben Mittelpunktwinkel des ebenen Fünfecks

$$a = 36^\circ = \frac{1}{2}x_a = \gamma_a;$$

woraus folgt, dass jeder Excedent des Dreyecks ACD

$$\gamma_a = \gamma_c = \gamma_d = 36^\circ, \quad (45.)$$

und die Summe

$$\gamma_a + \gamma_o + \gamma_d = 3 \times 36^\circ,$$

also der Flächeninhalt dieses Regeldreiecks *drey Fünftel* des großen Kreises beträgt.

49. Eine Diagonale und zwey Seiten des Icosaëdrischen Fünfecks bilden ein stumpfes Regeldreieck, in welchem zwey Excedenten Null sind, und das sich zum Flächeninhalte des großen Kreises verhält wie 1 : 5. (Fig. 14.)

Die an dem Bogen AC liegenden Tangenten-Winkel des sphärischen Dreyecks ABC sind

$$x_{a'} = x_{o'} = \frac{1}{2} x_p = 36^\circ, \quad (48.)$$

und die Sehnenwinkel BAC und $BCA =$

$$a' = c' = a = 36^\circ. \quad (48.)$$

Ihre Excedenten sind also

$$\gamma_{a'} = \gamma_{o'} = 0.$$

Der stumpfe Tangenten-Winkel ABC ist

$$x_{b'} = 2 x_p = 144^\circ,$$

und sein Sehnenwinkel, als Polygonswinkel des ebenen Fünfecks:

$$b' = 3 a' = 108^\circ.$$

Sein Excedent enthält allein das sphärische Übermaß des ganzen Dreyecks, da die andern Null sind:

$$\gamma_{b'} = 36^\circ = \gamma_{(ABC)},$$

und daher ist der Flächeninhalt dieses Regeldreiecks *ein Fünftel* des großen Kreises.

50. In jedem geodetischen Dreyecke des dritten Falles, ist der Excedent des stumpfen Winkels gröfser als die Summe der zwey andern; und der gröfsere von beyden spitzi- gen Winkeln hat den kleinsten positiven, oder den gröfsten negativen Excedenten. (Fig. 3.)

Wenn abc ein geodetisches Dreyeck, und $c > 90^\circ$ ist, so mufs

$$\sin c \cos c \text{ negativ,}$$

$$\sin a \cos a \text{ und } \sin b \cos b$$

aber positiv seyn.

Der Excedent γ_0 , welcher sich zu $(\gamma_a + \gamma_b)$ verhält, wie die Summe beyder positiver Produkte, zu derselben Summe mehr dem doppel- ten negativen Produkte (38.), ist daher gröfser als die zwey andern:

$$\text{I. } \gamma_0 > (\gamma_a + \gamma_b).$$

In jedem stumpfwinkligen Dreyecke ist die Summe der zwey spitzi- gen Winkel

$$a + b < \frac{a + b + c}{2}.$$

Ist nun der gröfsere a um β_a gröfser als 45° ,

$$\text{oder } a - \beta_a = \frac{a + b + c}{4},$$

$$\text{so ist auch } b + \beta_b = \frac{a + b + c}{4}$$

$$\text{und } \beta_b > \beta_a;$$

wären aber beyde kleiner als 45° , so müfste eben so $\beta_b > \beta_a$, und daher immer

II. $\sin a \cos a > \sin b \cos b$ seyn. (40.)

Wenn also $a > b$ und $c > 90^\circ$, so ist
 $(\sin b \cos b - \sin c \cos c) < (\sin a \cos a - \sin c \cos c)$
 oder $(P M a - P N a) < (P L b - P N b)$
 und $\gamma_a < \gamma_b$. (38.)

51. Wenn ein geodetisches gleichschenkliges Dreyeck einen Winkel von 120° enthält, so ist es ein stumpfes Regeldreyeck, und zwey seiner Excedenten sind Null.

Wenn $a = 120^\circ$,

$b = 30^\circ$,

$c = 30^\circ$,

so ist $\sin b = \sin c = \sin a$

und $\cos b = \cos c = -\cos a$;

hieraus folgt:

$$\sin c \cos c - \sin a \cos a = 0$$

$$\text{und } \sin b \cos b - \sin a \cos a = 0$$

$$\text{oder } \gamma_b = \gamma_c = 0. \quad (38.)$$

52. In einem stumpfwinkligen geodetischen Dreyecke ist der Excedent eines spitzigen Winkels positiv, wenn dessen spitziger Mitwinkel gröfser ist als der stumpfe, weniger 90° ; Null, wenn er dieser Differenz gleich; negativ, wenn er kleiner ist.

Wenn def ein bey d stumpfes geodetisches Dreyeck, und der eine Winkel

$$f \gtrless (d - 90^\circ) \text{ ist,}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{so ist } \sin f \cos f \gtrless \sin d \cos d; \\ \text{denn weil } (d + f) < 180^\circ \text{ ist,} \\ \text{so mu\u00df auch } (d - 90^\circ + f) < 90^\circ \\ \text{und } \beta_{(d-90^\circ)} \gtrless \beta_f \text{ seyn.} \end{array} \right\} (50. \text{ II.})$$

Es ist also

$$(\sin f \cos f - \sin d \cos d) \gtrless 0$$

$$\text{und } \gamma_e \gtrless 0. \quad (38.)$$

53. Aus Vorigem folgt:

I. Wenn in geodetischen Dreyecken ein Winkel d zwischen 90° und 120° , und

$$e = f \text{ ist,}$$

so sind alle Excedenten positiv; ist

$$f < (d - 90^\circ),$$

so wird γ_f positiv, und γ_e negativ.

Da beyde nicht zugleich $< (d - 90^\circ)$ seyn k\u00f6nnen, so kann auch *nur ein Excedent negativ* seyn.

II. Ist d \u00fcber 120° , und

$$e = f,$$

so sind zwey Excedenten negativ.

III. Wenn d zwischen 120° und 135° , und

$$e > (d - 90^\circ) \text{ ist,}$$

so wird γ_f positiv, und γ_e negativ.

Beyde können in diesem Falle nicht zugleich $> (d - 90^\circ)$, und folglich *mufs* ein *Excedent negativ* seyn.

IV. Ist d gröfser als 135° , so kann weder e noch $f > 45^\circ$ seyn; vielmehr sind beyde

$$< (d - 90^\circ),$$

und γ_f sowohl als γ_e negativ.

Geodetische Dreyecke mit einem Winkel über 135° , müssen also zwey negative Excedenten haben.

54. Die Seite eines Sehnendreyecks, deren Gegenwinkel 150° hat, ist gleich dem Halbmesser der Grundfläche des Segmentes; weil der Winkel von 150° mit dem Mittelpunktwinkel von 60° einerley Sehne hat.

Bis 120° hat jedes Sehnendreyeck wenigstens eine Seite, welche gröfser ist als jene des gleichseitigen im gleichen Segmente.

Bis ausschliessend 150° haben alle wenigstens eine Seite gröfser, als der Halbmesser der Grundfläche des Segmentes ist.

Bey Dreyecken, die einen Winkel über 150° haben, wächst das Mafs der Segmente, im Verhältnisse zu den Seiten des Dreyecks so rasch,

dafs zwischen 175° und 180° , Dreyecke mit gewöhnlichen Vermessungsseiten schon ein bedeutendes Stück der Erdkugel, und endlich die Hälfte derselben zum Segmente erfordern.

55. Es ist daher, mit Beziehung auf (36.), wiederholt zu erinnern, dafs *nur die Länge des Durchmessers der Segmente entscheidet, ob I. ein gegebenes Sehnendreyeck überhaupt auf der Erde möglich, und ob II. auf dasselbe ohne fühlbare Irrung anzuwenden sey, was von geodetischen Dreyecken bewiesen ist.*

Alle irdischen, mefsbaren Dreyecke der ersten zwey Fälle und selbst des dritten, bis einschliessend zum Regeldreyecke von 120° , sind wohl ohne weitere Prüfung, in diesem Sinne geodetische zu nennen. Zwischen 120° und 150° dürften, bey sehr grossen Seiten, schon Ausnahmen Statt finden. Über 150° aber wird es nöthig zu wissen, ob das Sehnendreyeck, wegen der gegebenen Länge der Seiten, nicht einem so grossen Segmente angehöre, dafs es *als eigentlich sphärisches Dreyeck* betrachtet werden mufs.

Nahe an 180° endlich, finden sich *unmögliche Sehnendreyecke*, d. i. solche, welche auf der Ebene gedacht, oder auch im scheinbaren Horizon gemessen werden, aber als Sehnendreyecke auf einer gegebenen Kugel, z. B. der

Erde, nicht bestehen können; indem die gegebenen Seiten und Winkel *einen größern Durchmesser, als den der Kugel selbst*, für die Grundfläche des Segmentes erfordern würden.

56. *Ein Sehnendreyeck ist unmöglich, wenn eine Seite desselben, getheilt durch den Sinus ihres Gegenwinkels, größer ist als der Durchmesser der Kugel.* (Fig. 3.)

Im Sehnendreyecke abc ist der Winkel

$$a = cPL = P;$$

die halbe Gegenseite dieses Winkels ist

$$\frac{A}{2} = cL,$$

und der Halbmesser des Segmentes zu diesem Dreyecke

$$r = Pc.$$

Im rechtwinkligen ebenen Dreyecke cPL ist

$$\frac{cL}{\sin(cPL)} = Pc,$$

also der Durchmesser des Segmentes:

$$2r = \frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}.$$

Wenn daher $2R$, der Durchmesser der Kugel, kleiner ist als $\frac{A}{\sin a}$, so ist die Grundflä-

che des Segmentes gröfser als ein grofser Kreis der Kugel, und das gegebene Dreyeck kann in dieser Kugel nicht gedacht werden.

Eben so zeigt der Werth $\frac{A}{\sin a}$ oder die ent-

sprechende Zahl der logarithmischen Differenz des Sehnendreyecks auch unmittelbar, ob dasselbe, nach dem festzusetzenden Mafse der erforderlichen Genauigkeit, als ein geodetisches betrachtet werden könne.

Fig. 1.

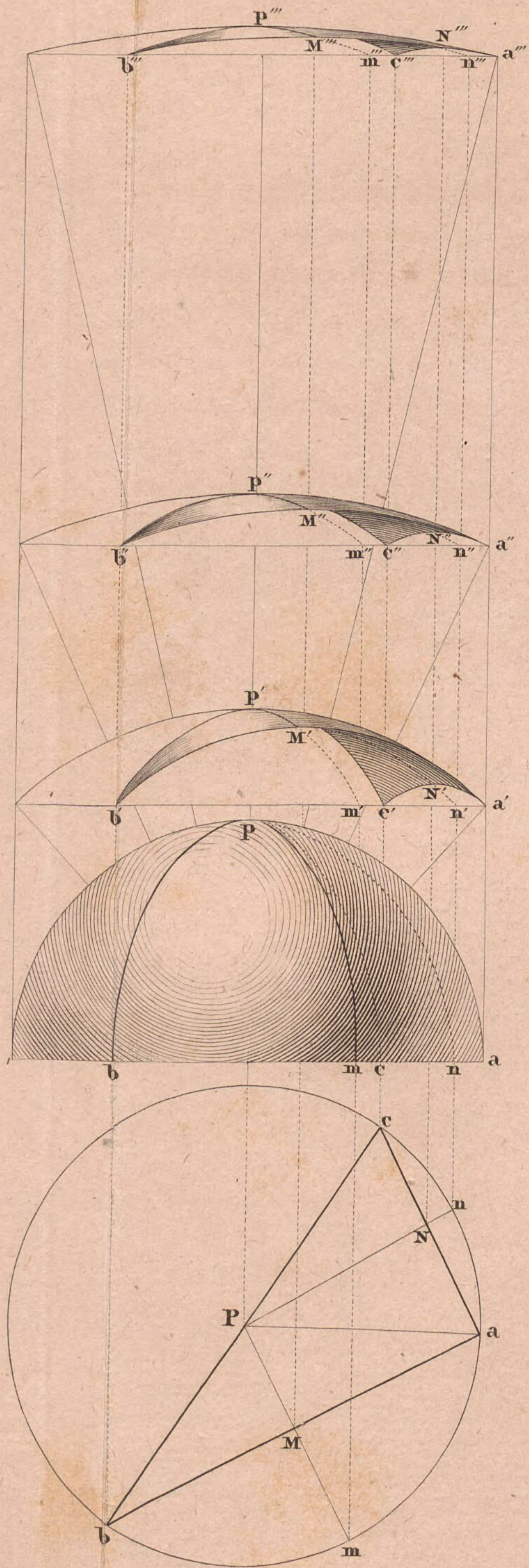
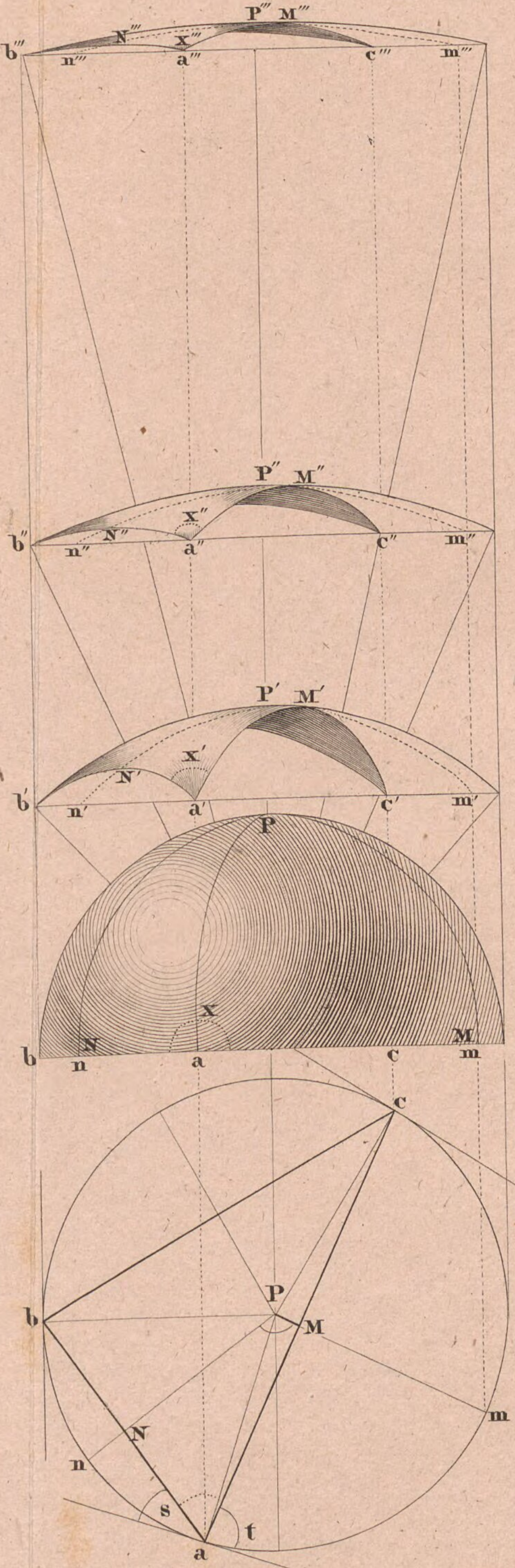


Fig. 2.



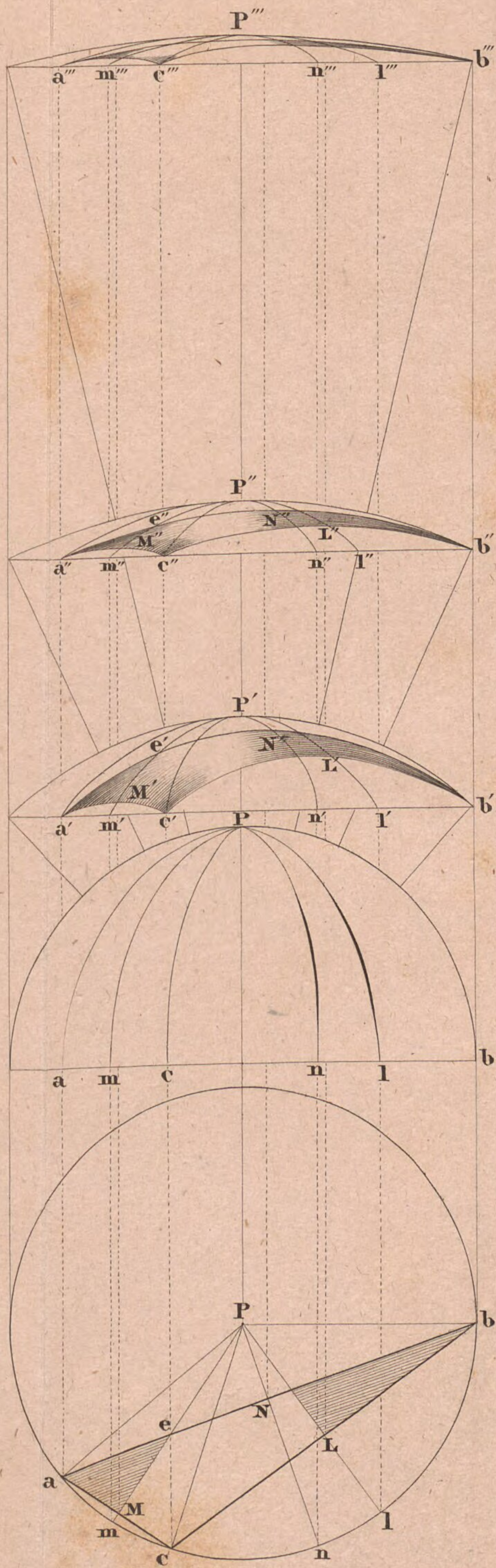


Fig. 3.

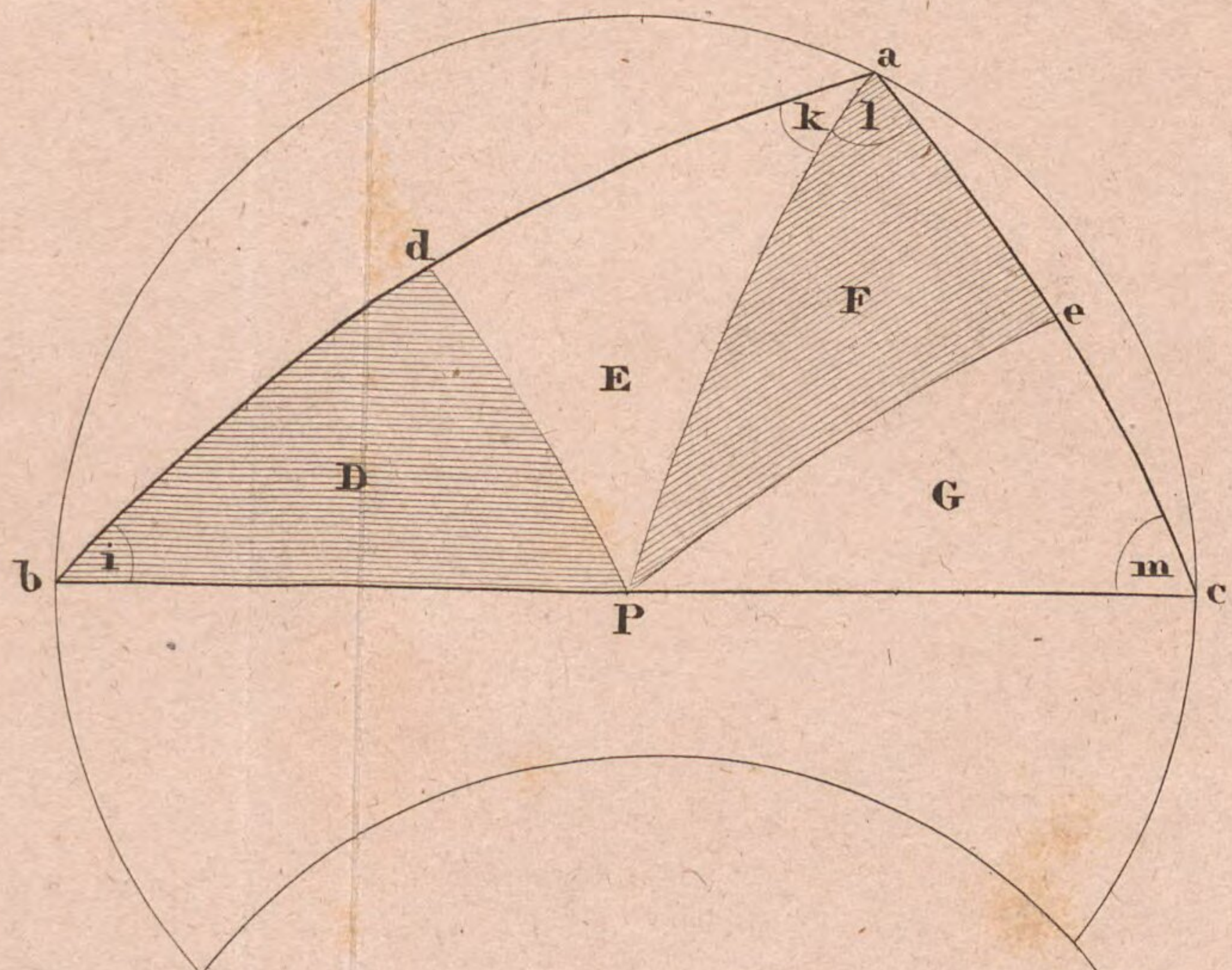


Fig. 4 .

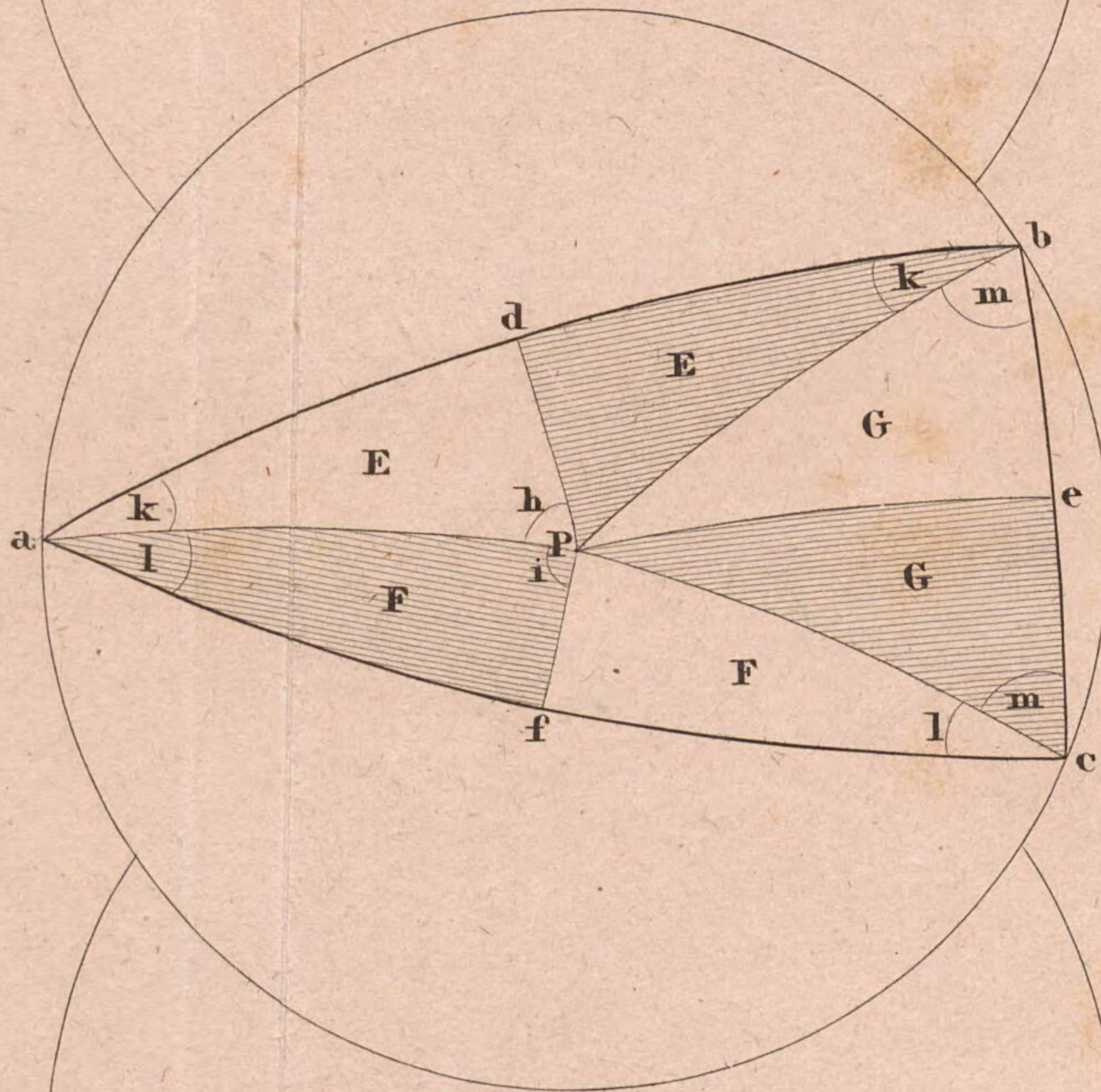


Fig. 5 .

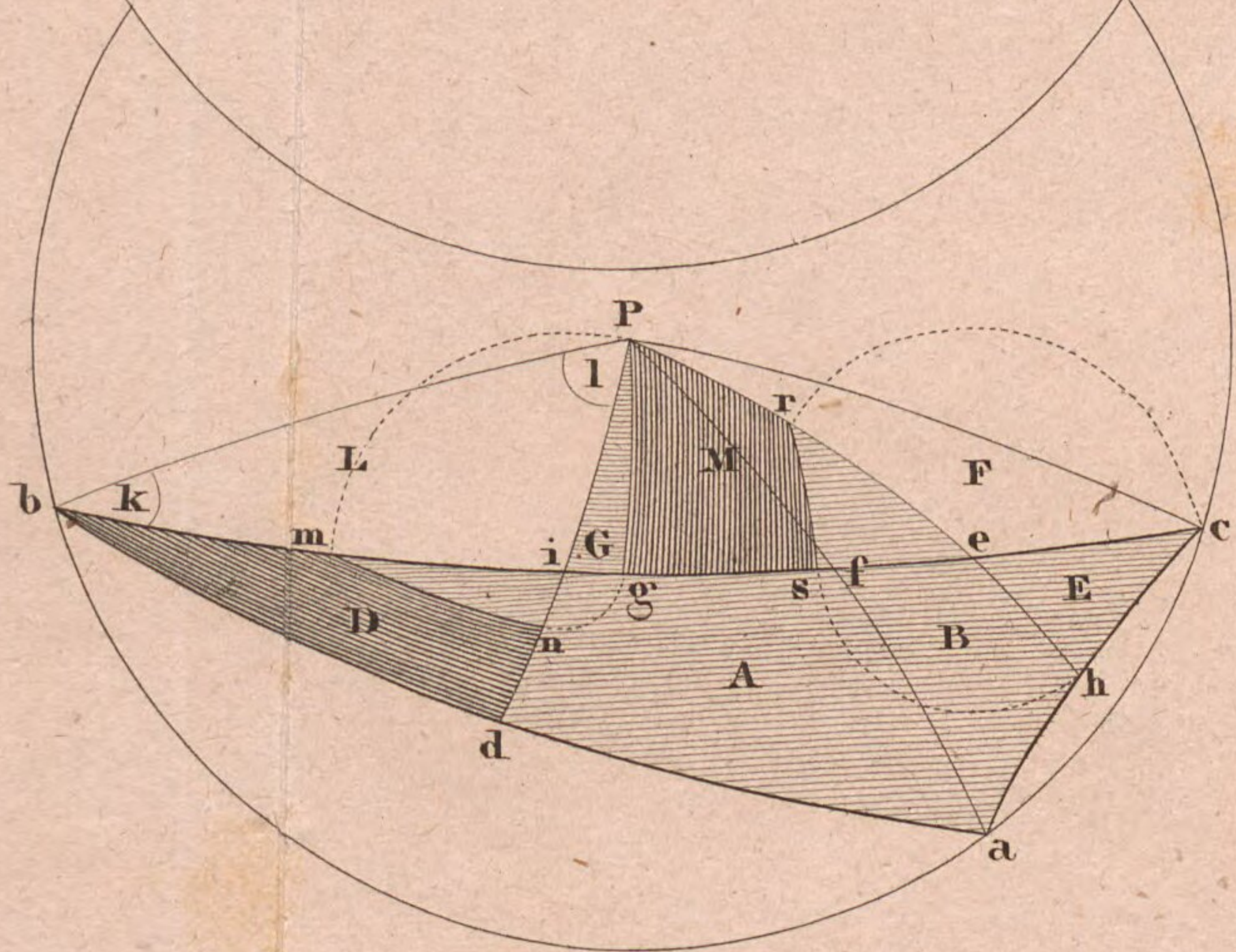


Fig. 6 .

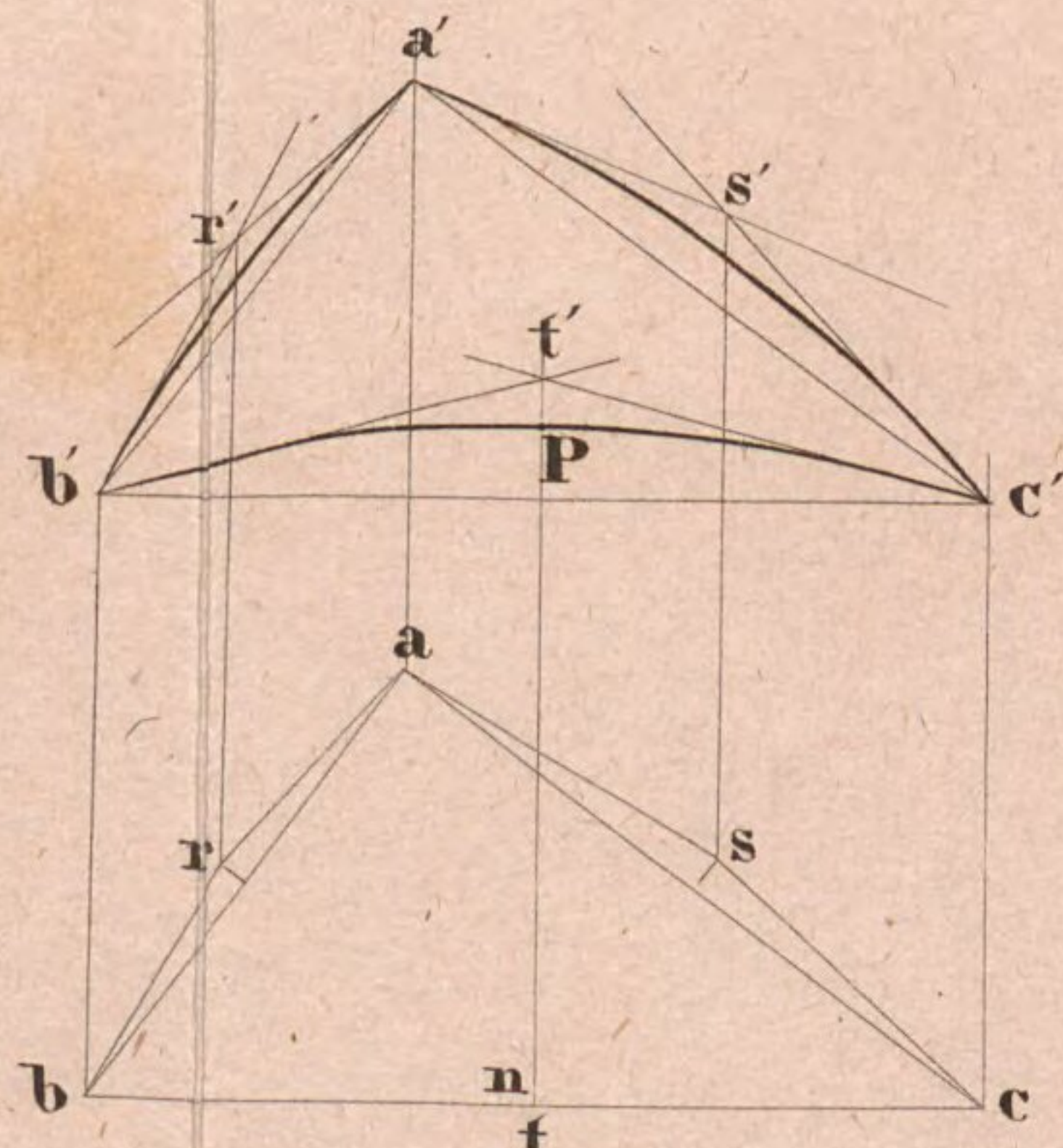


Fig. 7.

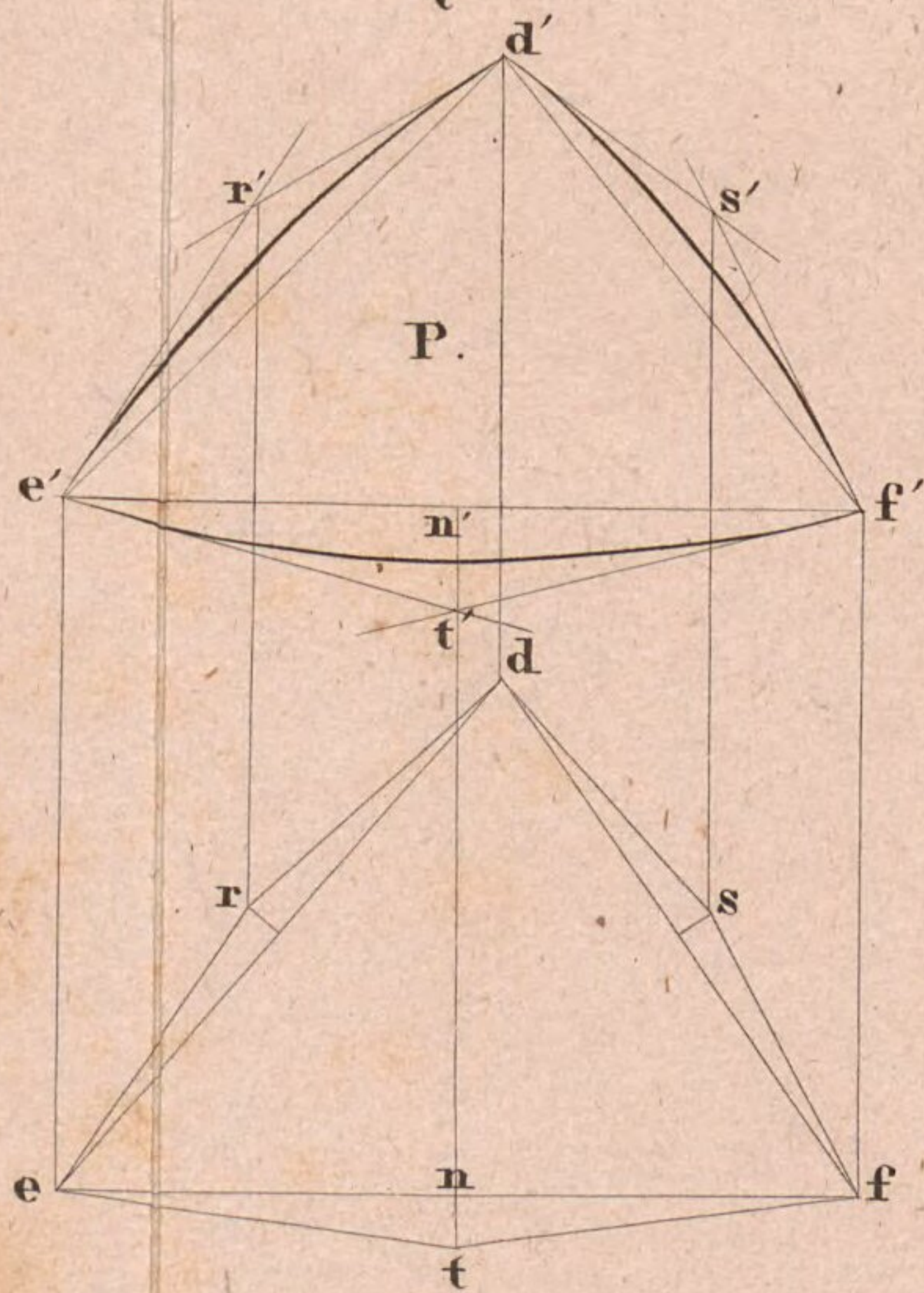


Fig. 8.

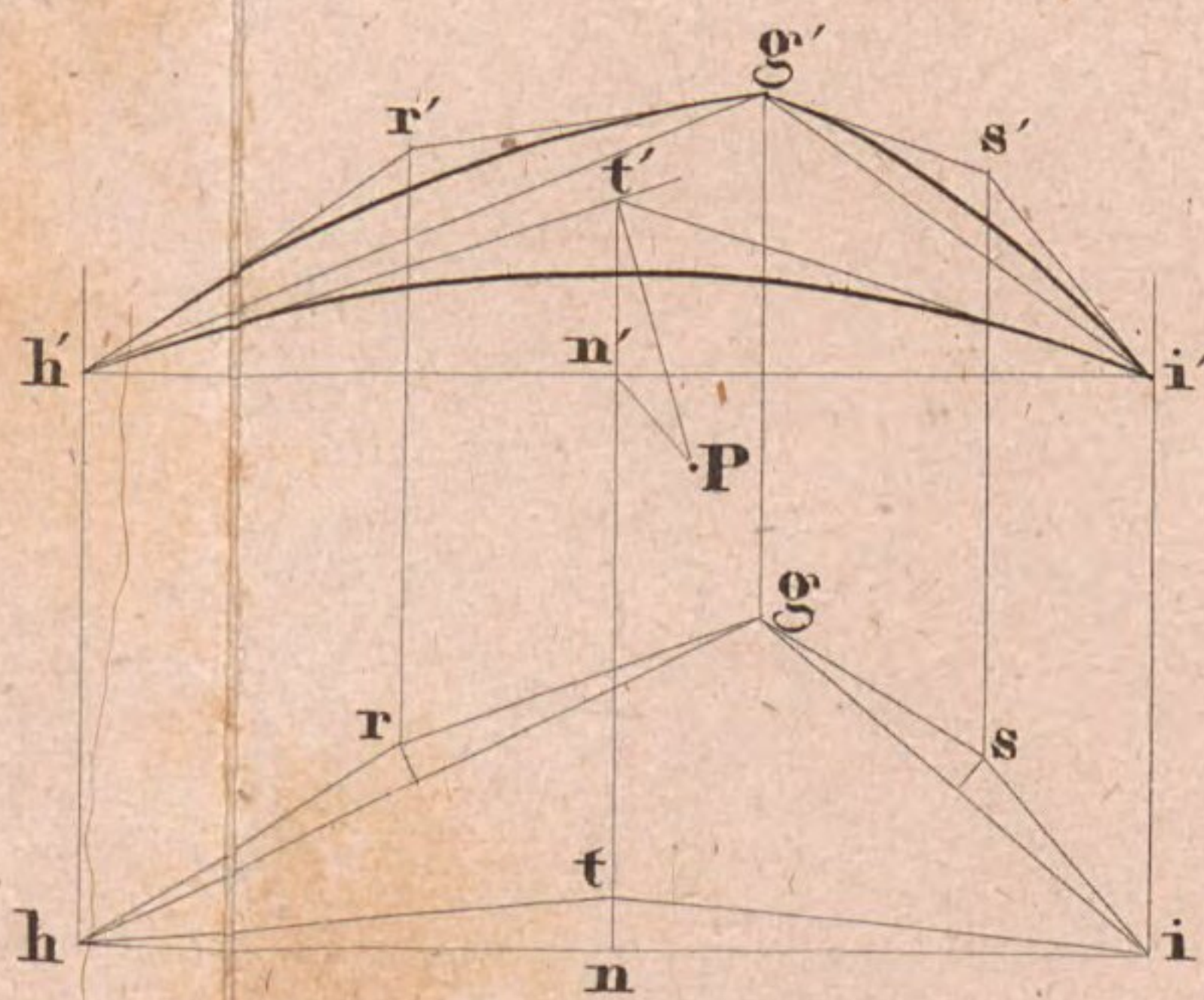
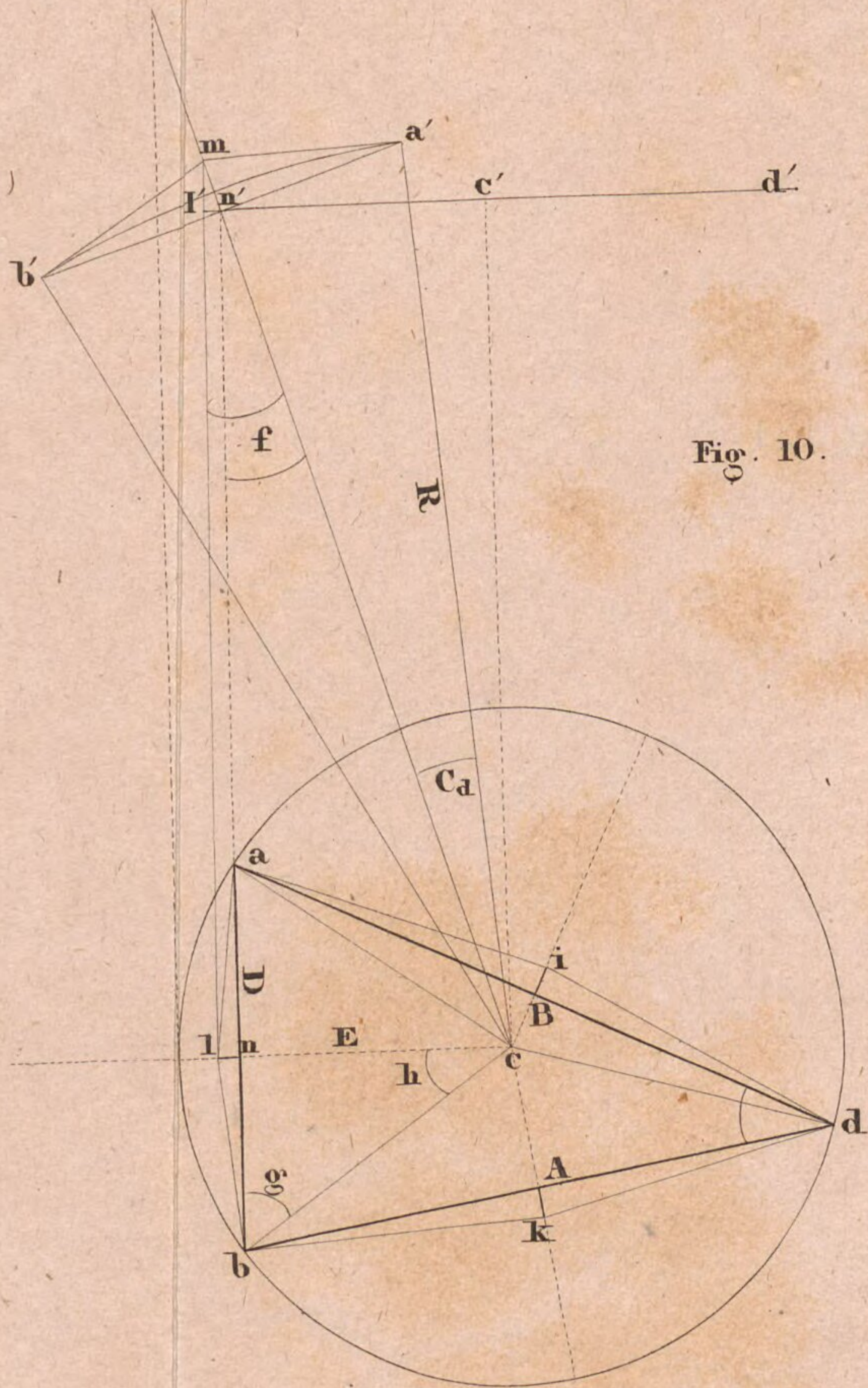


Fig. 9.





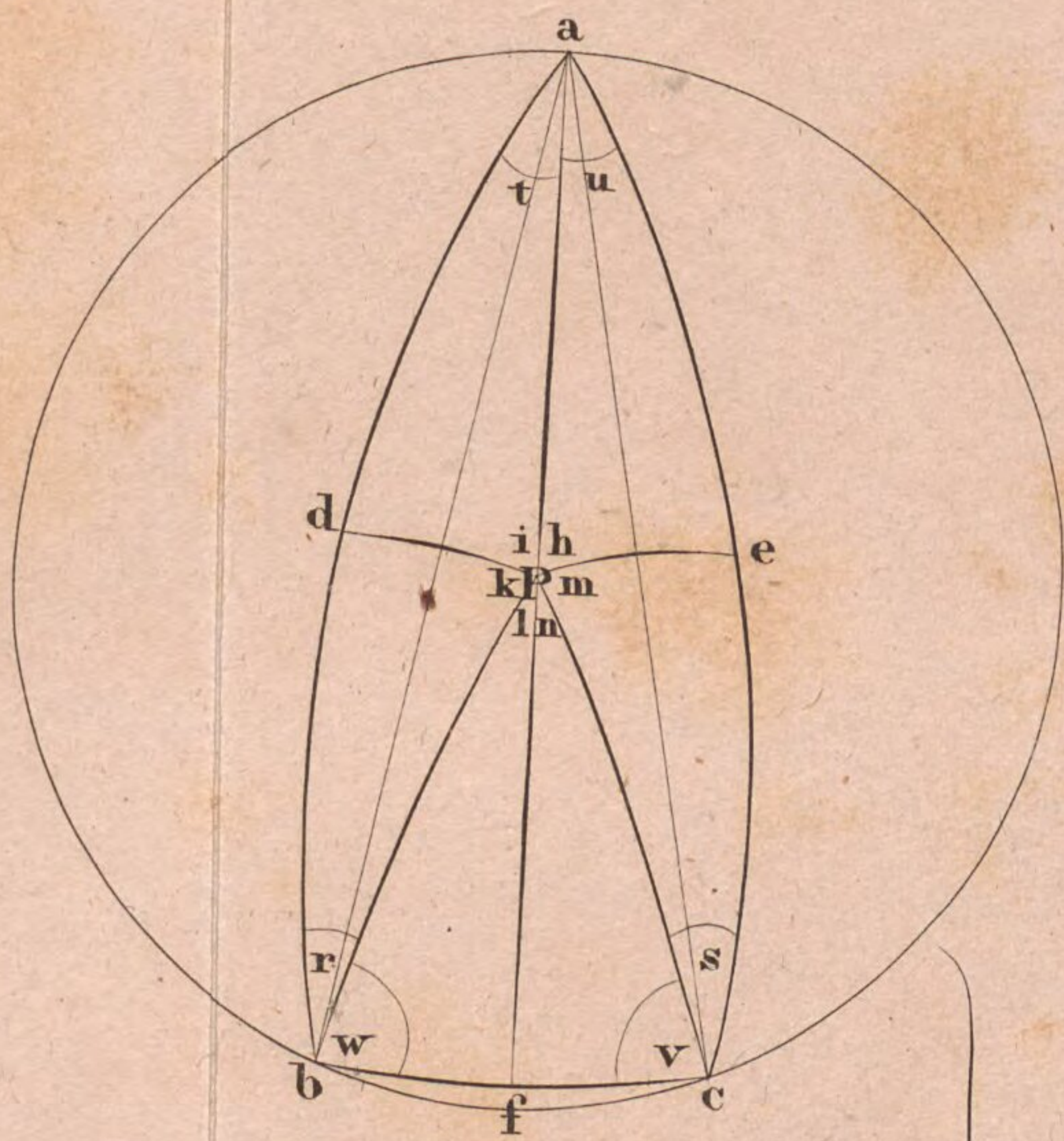


Fig. 11.

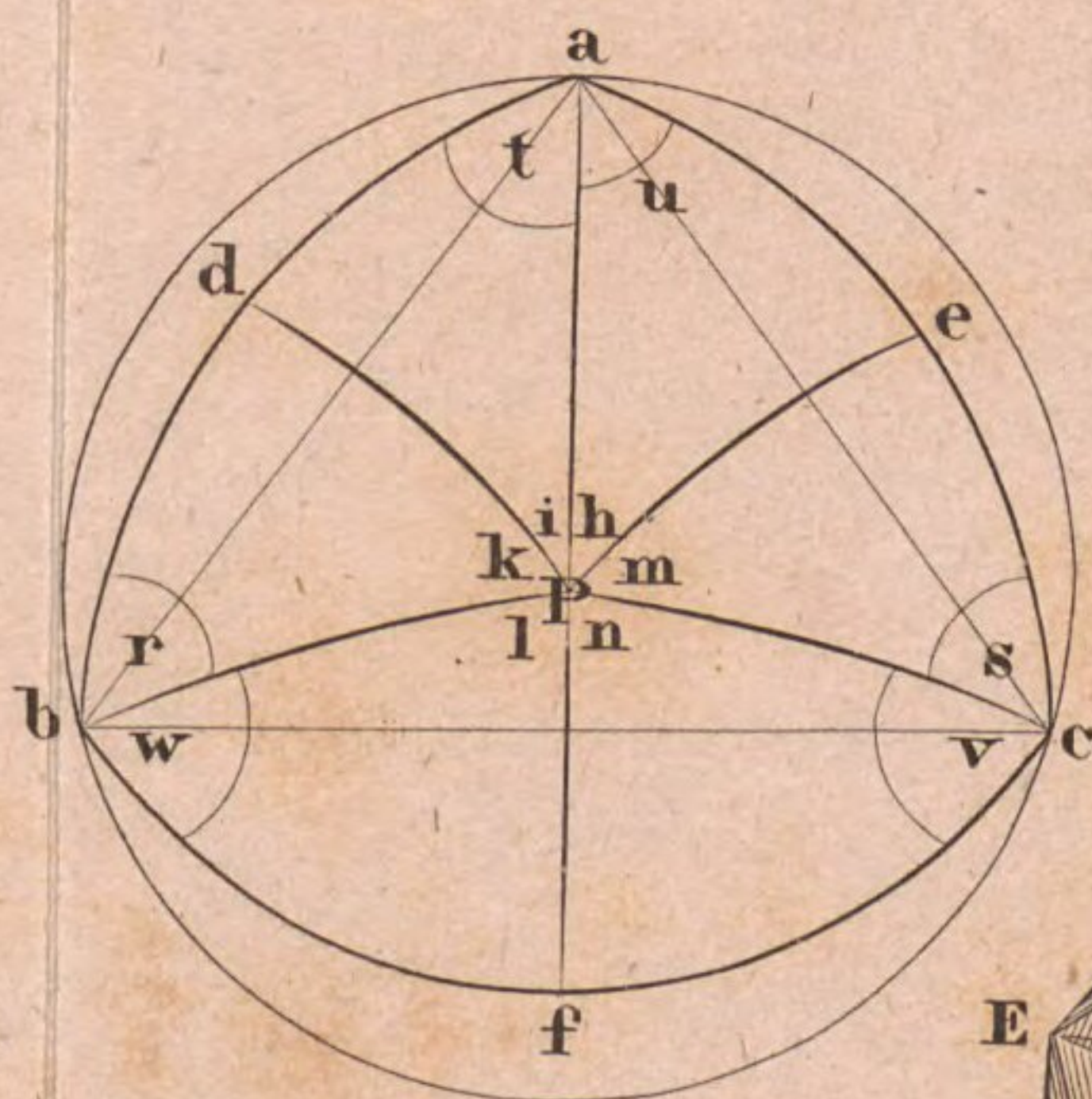


Fig. 13.

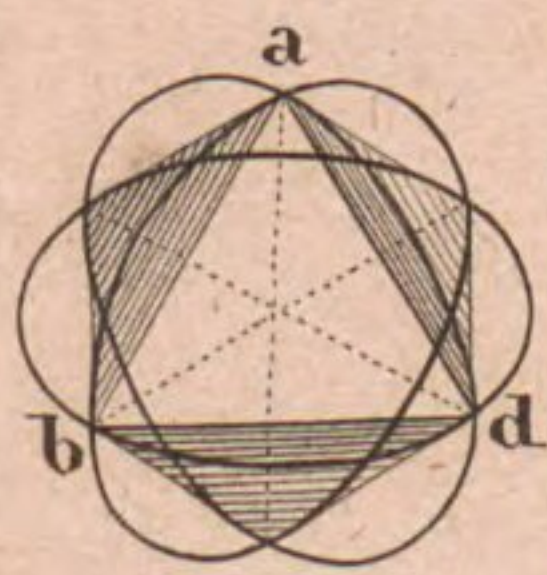


Fig. 14.

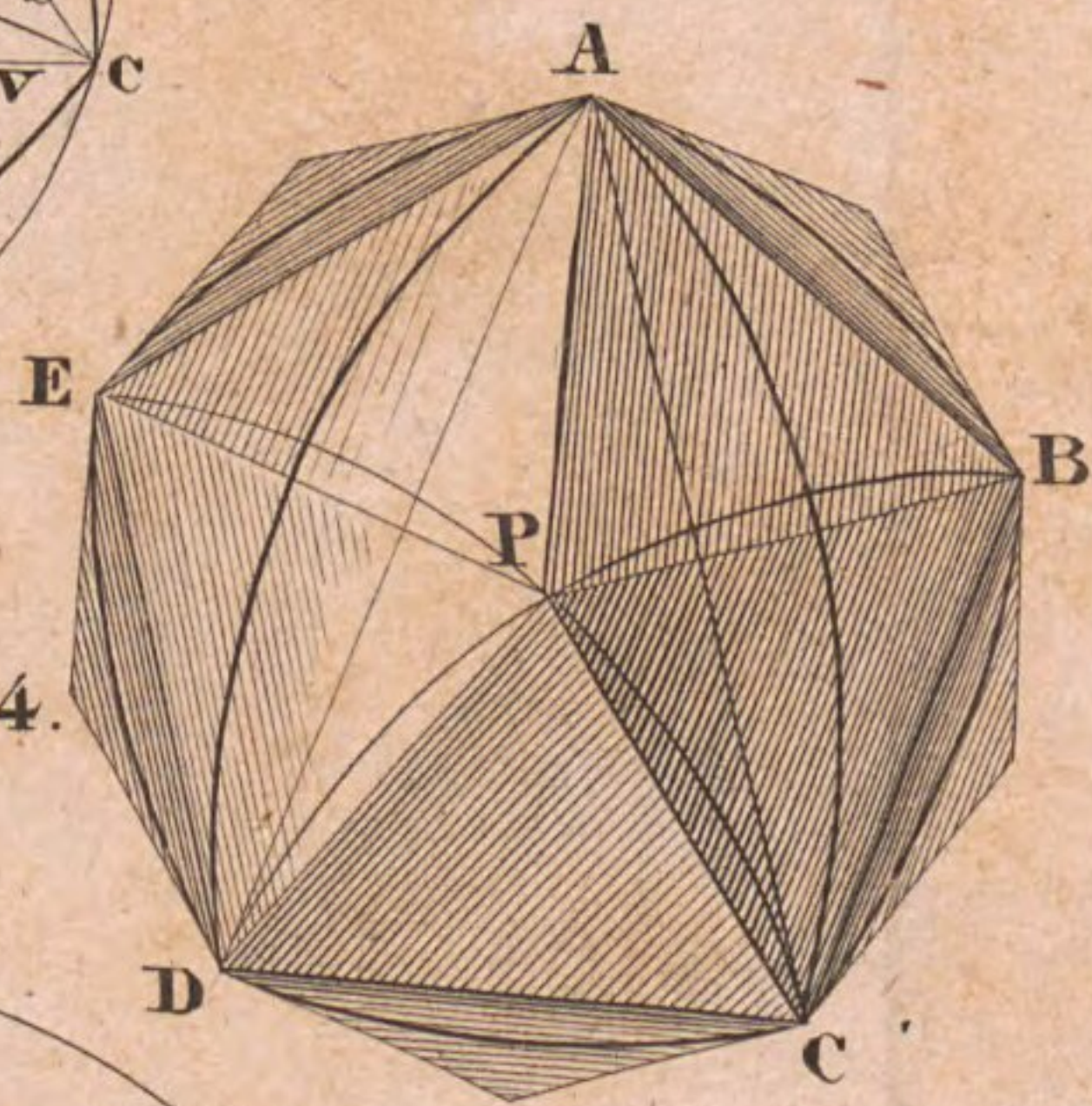
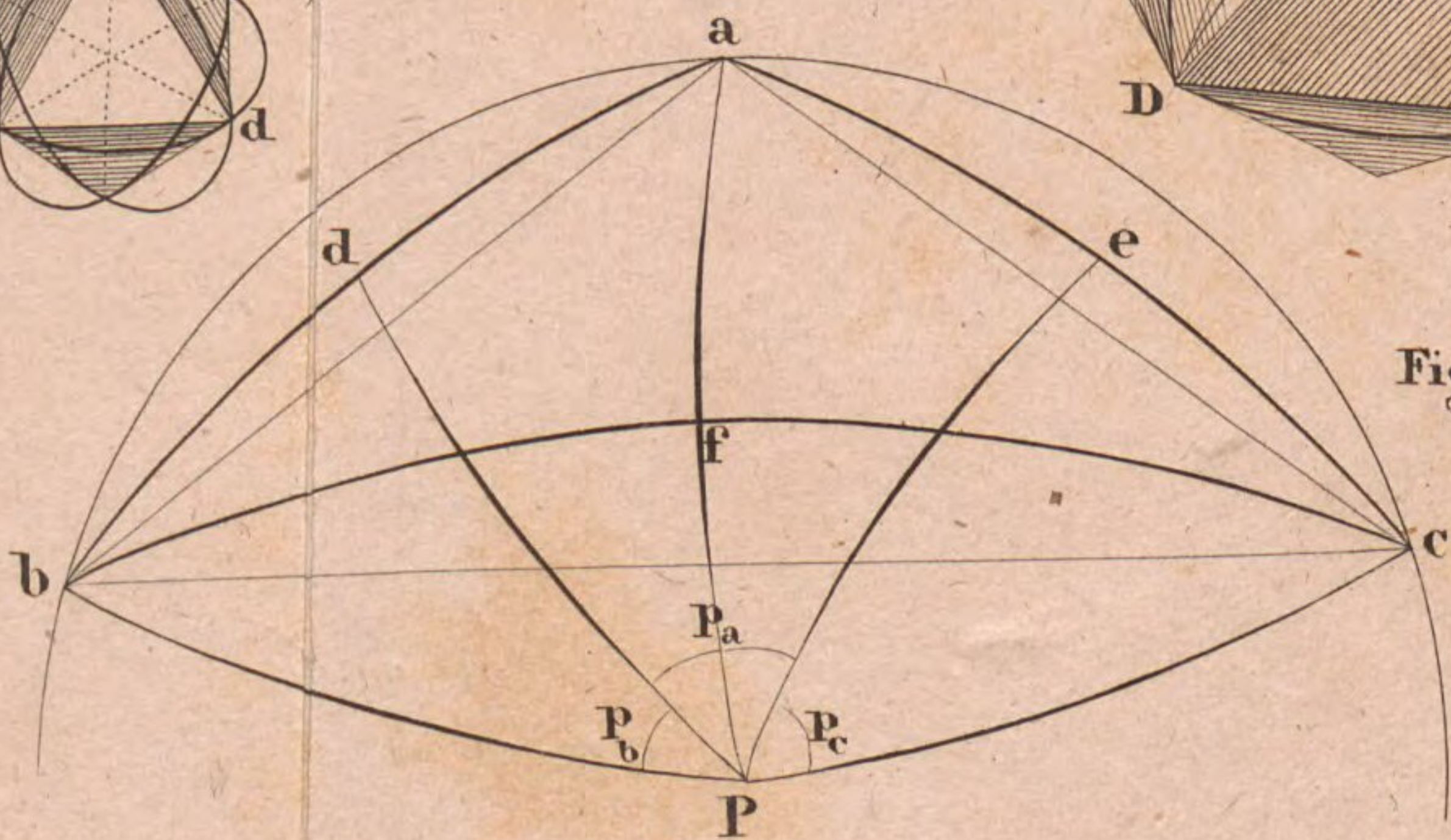


Fig. 12.



Riedl, J.

Beyträge zur Theorie der Sehnenwinkel mit 7 Kupfertafeln

Wien 1827

Math.p. 470 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082674-7